SOLUZIONI COMPITO A

Esercizio 1

L'equazione differenziale, a cui è associato il problema di Cauchy proposto, è un'equazione del primo ordine a variabili separabili, che ha come integrale singolare la funzione $y(x) \equiv 0$. Poiché essa non soddisfa la condizione iniziale, passiamo alla separazione delle variabili, ottenendo

$$\int \frac{dy}{y} = \int \log x \, dx \qquad \Longrightarrow \qquad \log|y(x)| = x \log x - \int x \cdot \frac{1}{x} \, dx \qquad \Longrightarrow \qquad \log|y(x)| = x \log x - x + C\,,$$

dove si è utilizzato il metodo dell'integrazione per parti per risolvere l'integrale a secondo membro nella prima uguaglianza. Imponendo la condizione iniziale $y(1) = 1$, si ricava $0 = 0 - 1 + C$, da cui $C = 1$ e, quindi, la soluzione richiesta sarà

$$y(x) = \mathrm{e}^{x \log x - x + 1} = \mathrm{e} \cdot \frac{x^x}{\mathrm{e}^x}\,.$$

Esercizio 2

Utilizzando la formula risolutiva per l'equazioni di secondo grado, valida anche in campo complesso, otteniamo:

$$z = 1 + \sqrt{1-4} = 1 + \sqrt{-3} = 1 \pm i\sqrt{3}\,.$$

Per rappresentare le soluzioni trovate in forma trigonometrica, dobbiamo determinarne modulo e argomento, utilizzando le relazioni:

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1+3} = 2\,, \qquad \begin{cases} \cos\theta = \dfrac{a}{\rho} = \dfrac{1}{2} \\ \\ \sin\theta = \dfrac{b}{\rho} = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \theta = \pm\frac{\pi}{3}\,.$$

Pertanto,

$$z_1 = 2[\cos(\pi/3) + i\sin(\pi/3)] \qquad\qquad z_2 = 2[\cos(\pi/3) - i\sin(\pi/3)]\,.$$

Esercizio 3

Poiché la funzione proposta è un polinomio (quindi di classe $\mathcal{C}^\infty$), i suoi punti critici si ottengono imponendo l'annullamento del gradiente, che porta al sistema di equazioni:

$$\begin{cases} f_x(x,y) = x^2 + xy - x - y = 0, \\ f_y(x,y) = x^2/2 - x = 0, \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} x^2 + xy - x - y = 0, \\ x(x/2 - 1) = 0. \end{cases}$$

Poiché la seconda equazione ha come soluzioni $x = 0$ oppure $x = 2$, sostituendo nella prima equazione si ricava, rispettivamente, $y = 0$ e $4 + 2y - 2 - y = 0$, da cui $y = -2$. Quindi f ammette solo due punti critici $P_1 = (0,0)$ e $P_2 = (2,-2)$. Per studiarne la natura, calcoliamo il determinate della matrice Hessiana in tali punti, che risulta essere

$$det \begin{pmatrix} 2x + y - 1 & x - 1 \\ x - 1 & 0 \end{pmatrix} \Bigg|_{(0,0),(2,-2)} = -1\,, \qquad \text{in entrambi i casi.}$$

Poiché il determinate della matrice Hessiana è negativo, la matrice è indefinita e i punti critici trovati sono entrambi dei punti di sella.

Esercizio 4

Utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al primo ordine per le funzioni $t \mapsto \log(1+t)$, con $t = x^3$, e $x \mapsto \sin x$, e lo sviluppo di Mc Laurin al secondo ordine per la funzione $t \mapsto \cos t$, con $t = x^2$, otteniamo

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x^3)\sin x}{1 - \cos x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3 \cdot x}{1 - [1 - (x^2)^2/2]} = \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{x^4/2} = 2\,.$$

Esercizio 5
Poiché la funzione f è continua (in quanto somma e prodotto di funzioni continue) sull'intervallo chiuso e limitato $[-\pi, \pi]$, per il Teorema di Weierstrass, essa ammette almeno un punto di massimo ed un punto di minimo assoluti. Poiché f è anche derivabile, studiando il segno di $f'(x) = \sin x + x\cos x - \sin x - x/2 = x(\cos x - 1/2)$, si ottiene

$$\begin{cases} f'(x) > 0 & \text{per } [-\pi, -\pi/3) \cup (0, \pi/3); \\ f'(x) < 0 & \text{per } (-\pi/3, 0) \cup (\pi/3, \pi]; \end{cases}$$

quindi, i punti $x = 0, \pm\pi$ sono candidati ad essere punti di minimo assoluto, mentre i punti $x = \pm\pi/3$ sono candidati ad essere punti di massimo assoluto. Confrontando fra loro i rispettivi valori, si ricava

$$\begin{aligned} & f(\pi) = f(-\pi) = -1 - \pi^2/4 \\ & f(0) = 1 \end{aligned} \qquad \text{e} \qquad f(-\pi/3) = f(\pi/3) = \frac{\sqrt{3}\pi}{6} + \frac{1}{2} - \frac{\pi^2}{36}\,.$$

Pertanto, $x = \pm\pi$ sono punti di minimo assoluto, mentre $x = \pm\pi/3$ sono punti di massimo assoluto.

Esercizio 6
Le funzioni di cui ai punti $A)$ e $B)$ sono continue su tutto $\mathbb{R}$, mentre la funzione in $C)$ presenta una discontinuità di salto in $x = 1$. L'unica funzione che presenta una discontinuità eliminabile in $x = 1$ è quella in $D)$, poiché

$$\lim_{x\to 1^-} \sin|x| = \lim_{x\to 1^+} \sin|x| = \sin 1 \neq 0 = f(1)\,.$$

Quindi la risposta esatta è $D)$.