

SOLUZIONI APPELLO STRAORDINARIO del 12/11/2012
ANALISI MATEMATICA I - 9 CFU
MECCANICA - ENERGETICA

Esercizio 1

Innanzitutto, osserviamo che la serie proposta è a termini positivi. Utilizzando il limite notevole $\sin \varepsilon_n \sim \varepsilon_n$, per $\varepsilon_n \rightarrow 0$ con $\varepsilon_n = e^{-n}$, le proprietà dei logaritmi e la gerarchia degli infiniti, otteniamo

$$\frac{[\sin(e^{-n})]^\alpha}{\log(n^2) + 2 \log n} \sim \frac{(e^{-n})^\alpha}{4 \log n} = \frac{1}{4e^{\alpha n} \log n} \rightarrow \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha \geq 0; \\ +\infty & \text{se } \alpha < 0. \end{cases}$$

Pertanto, se $\alpha < 0$, il termine generale non soddisfa la condizione necessaria e quindi la serie non converge. Se, invece, $\alpha = 0$,

$$\frac{[\sin(e^{-n})]^\alpha}{\log(n^2) + 2 \log n} \sim \frac{1}{4 \log n},$$

che non converge, in quanto si tratta della serie di Abel con esponenti $p = 0$ e $q = 1$, che è divergente. Infine, se $\alpha > 0$, si ha

$$0 \leq \frac{[\sin(e^{-n})]^\alpha}{\log(n^2) + 2 \log n} \leq \frac{C}{4} \left(\frac{1}{e^\alpha} \right)^n,$$

per un'opportuna costante $C > 0$ e, quindi, la serie proposta converge per il criterio del confronto con la serie geometrica di ragione $1/e^\alpha < 1$.

Esercizio 2

Integrando due volte per parti, si ottiene

$$\begin{aligned} \int (3x+1)^2 \sin x \, dx &= -(3x+1)^2 \cos x + 6 \int (3x+1) \cos x \, dx \\ &= -(3x+1)^2 \cos x + 6(3x+1) \sin x - 18 \int \sin x \, dx = -(3x+1)^2 \cos x + 6(3x+1) \sin x + 18 \cos x + C. \end{aligned}$$

Imponendo la condizione

$$\left(-(3x+1)^2 \cos x + 6(3x+1) \sin x + 18 \cos x + C \right) \Big|_{x=\pi/2} = 9\pi$$

otteniamo $9\pi + 6 + C = 9\pi$, da cui $C = -6$. Pertanto, la primitiva cercata sarà data dalla funzione $F(x) = -(3x+1)^2 \cos x + 6(3x+1) \sin x + 18 \cos x - 6$.

Esercizio 3

Osserviamo che, per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, l'equazione proposta è un'equazione lineare del secondo ordine a coefficienti costanti, la cui equazione caratteristica è $3\lambda^2 - 9 = 0$, che ha per soluzioni $\lambda = \pm\sqrt{3}$. Pertanto, l'integrale generale dell'equazione omogenea associata sarà $y_o(x) = C_1 e^{\sqrt{3}x} + C_2 e^{-\sqrt{3}x}$. Inoltre, per il metodo di sovrapposizione, la soluzione particolare $y_p(x)$ si può ottenere come somma di due funzioni $y_{1p}(x) + y_{2p}(x)$, di cui la seconda non dipende da α ed è costituita dalla funzione costante $y_{2p}(x) = -5/9$. La prima funzione, invece, dipende da α .

Per $\alpha = 0$, anch'essa risulta essere costante e sarà data da $y_{1p}(x) = -2/9$.

Per $\alpha \neq \pm\sqrt{3}$, la soluzione particolare sarà della forma $y_{1p}(x) = Ae^{\alpha x}$, da cui $y'_{1p}(x) = \alpha Ae^{\alpha x}$ e $y''_{1p}(x) = \alpha^2 Ae^{\alpha x}$; introducendo quanto trovato nell'equazione completa, otteniamo

$$3\alpha^2 Ae^{\alpha x} - 9Ae^{\alpha x} = 2e^{\alpha x},$$

da cui $(3\alpha^2 - 9)A = 2$, ovvero $A = 2(3\alpha^2 - 9)^{-1}$.

Per $\alpha = \sqrt{3}$, la soluzione particolare sarà della forma $y_{1p}(x) = Axe^{\sqrt{3}x}$, da cui $y'_{1p}(x) = Ae^{\sqrt{3}x} + \sqrt{3}Axe^{\sqrt{3}x}$ e $y''_{1p}(x) = 2\sqrt{3}Ae^{\sqrt{3}x} + 3Axe^{\sqrt{3}x}$; introducendo quanto trovato nell'equazione completa, otteniamo

$$6\sqrt{3}Ae^{\sqrt{3}x} + 9Axe^{\sqrt{3}x} - 9Axe^{\sqrt{3}x} = 2e^{\sqrt{3}x},$$

da cui $6\sqrt{3}A = 2$, ovvero $A = (3\sqrt{3})^{-1}$.

Per $\alpha = -\sqrt{3}$, prendendo la soluzione particolare della forma $y_{1p}(x) = Axe^{-\sqrt{3}x}$ e ripetendo i medesimi calcoli appena effettuati, otteniamo $A = -(3\sqrt{3})^{-1}$.

Concludendo, si ricava

$$y(x) = \begin{cases} C_1 e^{\sqrt{3}x} + C_2 e^{-\sqrt{3}x} - 7/9 & \text{se } \alpha = 0, \\ C_1 e^{\sqrt{3}x} + C_2 e^{-\sqrt{3}x} + \frac{2}{3\alpha^2 - 9} e^{\alpha x} - 5/9 & \text{se } \alpha \neq \pm\sqrt{3}, \\ C_1 e^{\sqrt{3}x} + C_2 e^{-\sqrt{3}x} + \frac{1}{3\sqrt{3}} x e^{\sqrt{3}x} - 5/9 & \text{se } \alpha = \sqrt{3}, \\ C_1 e^{\sqrt{3}x} + C_2 e^{-\sqrt{3}x} - \frac{1}{3\sqrt{3}} x e^{-\sqrt{3}x} - 5/9 & \text{se } \alpha = -\sqrt{3}. \end{cases}$$

Esercizio 4

Innanzitutto, dobbiamo imporre la condizione d'esistenza $z \neq 0$ ed, inoltre, conviene riscrivere l'equazione proposta nella forma $z^4 = -1/\bar{z}$, ovvero $z^4 \cdot \bar{z} = -1$. Ponendo $z = re^{i\theta}$, da cui $\bar{z} = re^{-i\theta}$, riscrivendo in forma esponenziale $-1 = e^{i\pi}$, e sostituendo nell'equazione proposta, ricaviamo

$$r^4 e^{i4\theta} r e^{-i\theta} = e^{i\pi} \quad \implies \quad r^5 e^{i3\theta} = e^{i\pi}.$$

Eguagliando modulo e argomento, a meno di $2k\pi$, otteniamo il sistema

$$\begin{cases} r^5 = 1, \\ 3\theta = \pi + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}, \end{cases} \quad \implies \quad \begin{cases} r = 1, \\ \theta = \frac{2k+1}{3}\pi \quad k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Da ciò ricaviamo le tre soluzioni $z_0 = e^{i\pi/3} = (1 + i\sqrt{3})/2$, $z_1 = e^{i\pi} = -1$ e $z_2 = e^{i5\pi/3} = (1 - i\sqrt{3})/2$.

Esercizio 5

L'affermazione è falsa, basta considerare, ad esempio, $a_n = \sqrt{\log n} \rightarrow +\infty$, $b_n = 1$, che è limitata, e $c_n = 1/(n\sqrt{\log n}) = o(1/n)$. In tal caso otteniamo

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{b_n c_n}{a_n} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1 \cdot 1/(n\sqrt{\log n})}{\sqrt{\log n}} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n \log n}$$

che diverge, in quanto è la serie di Abel di esponenti $p = 1$ e $q = 1$.