SOLUZIONI COMPITO INTEGRATIVO

Esercizio 1

L'equazione differenziale proposta è un'equazione lineare del secondo ordine a coefficienti costanti, la cui equazione caratteristica associata è

$$5\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \,.$$

Essa ha come soluzioni $\lambda = \frac{-1\pm 2i}{5}$, pertanto l'integrale generale dell'omogenea associata è dato da

$$y_0(x) = \mathrm{e}^{-x/5}\left[C_1\cos(2x/5) + C_2\sin(2x/5)\right].$$

Dal metodo di somiglianza si ricava anche che una soluzione particolare è data da $y_p(x) = \mathrm{e}^x/8$, quindi l'integrale generale dell'equazione proposta sarà

$$y(x) = \mathrm{e}^{-x/5}\left[C_1\cos(2x/5) + C_2\sin(2x/5)\right] + \frac{1}{8}\mathrm{e}^x \,.$$

Imponendo, infine, le condizioni iniziali, si ricava

$$y(x) = -\frac{5}{16}\mathrm{e}^{-x/5}\sin(2x/5) + \frac{1}{8}\mathrm{e}^x \,.$$

Esercizio 2

All'interno dell'insieme D, poiché la funzione è regolare, procediamo cercando i punti stazionari, cioè i punti che annullano il gradiente:

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 6x^2 - 2y = 0 \\ f_y(x,y) = -2x + 1 = 0\,, \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad (x,y) = (1/2, 3/4) \notin D\,.$$

Pertanto, non ci sono punti estremanti all'interno di D. Poiché f è continua e l'insieme D è chiuso e limitato, per il Teorema di Weierstrass la funzione ammette almeno un punto di massimo ed un punto di minimo assoluto in D. Poiché all'interno di D, come appena visto, non vi sono estremanti, essi saranno necessariamente sulla frontiera. Per determinarli, studiamo la restrizione di f alla frontiera di D.

- lato $a := \{x = 0,\ y \in [0,1]\}$:

$$f(0,y) = y =: g_1(y) \qquad \text{da cui} \qquad g_1'(y) = 1 > 0\,;$$

quindi la funzione è crescente quando $y \in [0,1]$. Pertanto $(0,0)$ è punto di minimo per f vincolato al lato a, mentre $(0,1)$ è punto di massimo per f vincolato al lato a.

- lato $b := \{y = 0,\ x \in [0,1]\}$:

$$f(x,0) = 2x^3 =: g_2(x) \qquad \text{da cui} \qquad g_2'(x) = 6x^2 \geq 0\,;$$

quindi la funzione è crescente quando $x \in [0,1]$. Pertanto $(0,0)$ è punto di minimo per f vincolato al lato b, mentre $(1,0)$ è punto di massimo per f vincolato al lato b.

- lato $c := \{y = (x-1)^2,\ x \in [0,1]\}$:

$$f\big(x,(x-1)^2\big) = 5x^2 - 4x + 1 =: g_3(x) \qquad \text{da cui} \qquad g_3'(x) = 10x - 4\,;$$

quindi la funzione è decrescente quando $x \in [0, 2/5)$ e crescente quando $x \in (2/5, 1]$. Pertanto $(0,1)$ e $(1,0)$ sono punti di massimo per f vincolati al lato c, mentre $(2/5, 9/25)$ è punto di minimo per f vincolato al lato c.

Poiché

$$\begin{cases} f(0,1) = 1 \\ f(1,0) = 2 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \begin{cases} f(0,0) = 0 \\ f(2/5, 9/25) = 1/5 \end{cases}$$

si ricava subito che $(0,0)$ è punto di minimo assoluto per f su D, mentre $(1,0)$ è punto di massimo assoluto per f su D.

Esercizio 3
Riscrivendo l'equazione differenziale nella forma

$$y'(x) = -xy^2(x) + x - 2x = -x(y^2(x) + 1)\,,$$

si ricava subito che essa è a variabili separabili e non ammette soluzioni singolari. Separando, invece le variabili, ricaviamo

$$\int \frac{dy}{y^2 + 1} = -\int x\ dx \qquad \Longrightarrow \qquad \arctan y(x) = -\frac{x^2}{2} + C\,.$$

Pertanto, l'integrale generale cercato è dato da $y(x) = \tan(-x^2/2 + C)$.

Esercizio 4
Considerando la funzione ristretta all'asse x e all'asse y, rispettivamente, si ottiene

$$\lim_{y\to 0} f(0, y) = \lim_{y\to 0} \frac{0}{y^4} = 0 \qquad\qquad \lim_{x\to 0} f(x, 0) = \lim_{x\to 0} \frac{2x^2}{x^2} = 2$$

pertanto il limite proposto non esiste.