SOLUZIONI COMPITO A

Esercizio 1
Posto

$$a_n := \left(1+\frac{2}{3n}\right)^{\frac{2n^2+2}{n^2+3}} \geq 0\,,$$

si ottiene facilmente che

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{2}{3n}\right)^{\frac{2n^2+2}{n^2+3}} = 1 \neq 0\,.$$

Pertanto, il termine generale, non essendo infinitesimo, non soddisfa la condizione necessaria per la convergenza della serie, e quindi la serie proposta diverge.

Esercizio 2
L'equazione differenziale proposta è un'equazione lineare del secondo ordine a coefficienti costanti, la cui equazione caratteristica associata è

$$5\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0\,.$$

Essa ha come soluzioni $\lambda = \frac{-1\pm 2i}{5}$, pertanto l'integrale generale dell'omogenea associata è dato da

$$y_0(x) = \mathrm{e}^{-x/5}\left[C_1\cos(2x/5) + C_2\sin(2x/5)\right].$$

Dal metodo di somiglianza si ricava anche che una soluzione particolare è data da $y_p(x) = \mathrm{e}^x/8$, quindi l'integrale generale dell'equazione proposta sarà

$$y(x) = \mathrm{e}^{-x/5}\left[C_1\cos(2x/5) + C_2\sin(2x/5)\right] + \frac{1}{8}\mathrm{e}^x\,.$$

Imponendo, infine, le condizioni iniziali, si ricava

$$y(x) = -\frac{5}{16}\mathrm{e}^{-x/5}\sin(2x/5) + \frac{1}{8}\mathrm{e}^x\,.$$

Esercizio 3
Poiché $f \geq 0$ nell'intervallo $[1,2]$, l'area richiesta sarà data da

$$A := \int_1^2 2\frac{\mathrm{e}^{-1/x^2}\log(1+\mathrm{e}^{-1/x^2})}{x^3}\,dx\,.$$

Effettuando il cambiamento di variabile $y = 1+\mathrm{e}^{-1/x^2}$, da cui $dy = \frac{2}{x^3}\,\mathrm{e}^{-1/x^2}\,dx$, $y(1) = 1+\mathrm{e}^{-1}$ e $y(2) = 1+\mathrm{e}^{-1/4}$, si ricava

$$\begin{aligned} A &= \int_{1+1/\mathrm{e}}^{1+1/\sqrt[4]{\mathrm{e}}} \log y\,dy = y\log y\Big|_{1+1/\mathrm{e}}^{1+1/\sqrt[4]{\mathrm{e}}} - \int_{1+1/\mathrm{e}}^{1+1/\sqrt[4]{\mathrm{e}}} \frac{y}{y}\,dy \\ &= \left(1+\frac{1}{\sqrt[4]{\mathrm{e}}}\right)\log(1+1/\sqrt[4]{\mathrm{e}}) - \left(1+\frac{1}{\mathrm{e}}\right)\log(1+1/\mathrm{e}) - \frac{1}{\sqrt[4]{\mathrm{e}}} + \frac{1}{\mathrm{e}}\,. \end{aligned}$$

Esercizio 4
All'interno dell'insieme D, poiché la funzione è regolare, procediamo cercando i punti stazionari, cioè i punti che annullano il gradiente:

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 6x^2 - 2y = 0 \\ f_y(x,y) = -2x + 1 = 0\,, \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad (x,y) = (1/2, 3/4) \notin D\,.$$

Pertanto, non ci sono punti estremanti all'interno di D. Poiché f è continua e l'insieme D è chiuso e limitato, per il Teorema di Weierstrass la funzione ammette almeno un punto di massimo ed un punto di minimo assoluto in D. Poiché all'interno di D, come appena visto, non vi sono estremanti, essi saranno necessariamente sulla frontiera. Per determinarli, studiamo la restrizione di f alla frontiera di D.

- lato $a := \{x = 0,\ y \in [0,1]\}$:

$$f(0,y) = y =: g_1(y) \qquad \text{da cui} \qquad g_1'(y) = 1 > 0\,;$$

quindi la funzione è crescente quando $y \in [0,1]$. Pertanto $(0,0)$ è punto di minimo per f vincolato al lato a, mentre $(0,1)$ è punto di massimo per f vincolato al lato a.

- lato $b := \{y = 0,\ x \in [0,1]\}$:

$$f(x,0) = 2x^3 =: g_2(x) \qquad \text{da cui} \qquad g_2'(x) = 6x^2 \geq 0\,;$$

quindi la funzione è crescente quando $x \in [0,1]$. Pertanto $(0,0)$ è punto di minimo per f vincolato al lato b, mentre $(1,0)$ è punto di massimo per f vincolato al lato b.

- lato $c := \{y = (x-1)^2,\ x \in [0,1]\}$:

$$f\big(x,(x-1)^2\big) = 5x^2 - 4x + 1 =: g_3(x) \qquad \text{da cui} \qquad g_3'(x) = 10x - 4\,;$$

quindi la funzione è decrescente quando $x \in [0, 2/5)$ e crescente quando $x \in (2/5, 1]$. Pertanto $(0,1)$ e $(1,0)$ sono punti di massimo per f vincolati al lato c, mentre $(2/5, 9/25)$ è punto di minimo per f vincolato al lato c.

Poiché

$$\begin{cases} f(0,1) = 1 \\ f(1,0) = 2 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \begin{cases} f(0,0) = 0 \\ f(2/5, 9/25) = 1/5 \end{cases}$$

si ricava subito che $(0,0)$ è punto di minimo assoluto per f su D, mentre $(1,0)$ è punto di massimo assoluto per f su D.

Esercizio 5
Osserviamo che le soluzioni dell'equazione proposta sono date dall'insieme delle soluzioni delle due equazioni

$$z^2 + i = 0 \qquad \text{e} \qquad z^3 - 8 = 0\,.$$

La prima equazione consiste nel determinare le due radici quadrate di $-i$, mentre la seconda consiste nel determinare le tre radici cubiche di 8; ovvero

$$z = \sqrt{-i} = \begin{cases} \cos(-\pi/4) + i\sin(-\pi/4) = 1/\sqrt{2} - i/\sqrt{2} \\ \cos(3\pi/4) + i\sin(3\pi/4) = -1/\sqrt{2} + i/\sqrt{2} \end{cases}$$

$$z = \sqrt[3]{8} = \begin{cases} 2 \\ 2[\cos(2\pi/3) + i\sin(2\pi/3)] = -1 + i\sqrt{3} \\ 2[\cos(4\pi/3) + i\sin(4\pi/3)] = -1 - i\sqrt{3} \end{cases}\,.$$

Esercizio 6
Condizione necessaria affinché il punto stazionario $(2,1)$ sia di massimo per f è che la matrice Hessiana in tale punto sia *semidefinita negativa*, cioè abbia tutti gli autovalori ≤ 0. Poiché nel nostro caso gli autovalori di $H_f(2,1)$ sono 3 e -2, cioè sono discordi (e quindi la matrice è indefinita), $(2,1)$ NON può essere punto di massimo (in realtà esso è punto di sella).

SOLUZIONI COMPITO B

Esercizio 1

Posto

$$a_n := \left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{n^2+2}{n^3+3}} \geq 0\,,$$

si ottiene facilmente che

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{n^2+2}{n^3+3}} = 1 \neq 0\,.$$

Pertanto, il termine generale, non essendo infinitesimo, non soddisfa la condizione necessaria per la convergenza della serie, e quindi la serie proposta diverge.

Esercizio 2

L'equazione differenziale proposta è un'equazione lineare del secondo ordine a coefficienti costanti, la cui equazione caratteristica associata è

$$\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0\,.$$

Essa ha come soluzioni $\lambda = 1 \pm 2i$, pertanto l'integrale generale dell'omogenea associata è dato da

$$y_0(x) = \mathrm{e}^x \left[C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x)\right].$$

Dal metodo di somiglianza si ricava anche che una soluzione particolare è data da $y_p(x) = \mathrm{e}^{2x}/5$, quindi l'integrale generale dell'equazione proposta sarà

$$y(x) = \mathrm{e}^x \left[C_1 \cos(2x) + C_2 \sin(2x)\right] + \frac{1}{5}\mathrm{e}^{2x}\,.$$

Imponendo, infine, le condizioni iniziali, si ricava

$$y(x) = -\frac{2}{5}\mathrm{e}^x \cos(2x) + \frac{1}{5}\mathrm{e}^{2x}\,.$$

Esercizio 3

Poiché $f \geq 0$ nell'intervallo $[1,2]$, l'area richiesta sarà data da

$$A := \int_1^2 \frac{\mathrm{e}^{1/x}\log(1+\mathrm{e}^{1/x})}{x^2}\;dx\,.$$

Effettuando il cambiamento di variabile $y = 1+\mathrm{e}^{1/x}$, da cui $dy = -\frac{1}{x^2}\,\mathrm{e}^{1/x}\,dx$, $y(1) = 1+\mathrm{e}$ e $y(2) = 1+\mathrm{e}^{1/2}$, si ricava

$$\begin{aligned} A &= -\int_{1+\mathrm{e}}^{1+\sqrt{\mathrm{e}}} \log y\;dy = \int_{1+\sqrt{\mathrm{e}}}^{1+\mathrm{e}} \log y\;dy = y\log y\Big|_{1+\sqrt{\mathrm{e}}}^{1+\mathrm{e}} - \int_{1+\sqrt{\mathrm{e}}}^{1+\mathrm{e}} \frac{y}{y}\;dy \\ &= (1+\mathrm{e})\log(1+\mathrm{e}) - (1+\sqrt{\mathrm{e}})\log(1+\sqrt{\mathrm{e}}) - \mathrm{e} + \sqrt{\mathrm{e}}\,. \end{aligned}$$

Esercizio 4

All'interno dell'insieme D, poiché la funzione è regolare, procediamo cercando i punti stazionari, cioè i punti che annullano il gradiente:

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 6x^2 + 2y = 0 \\ f_y(x,y) = 2x + 1 = 0\,, \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad (x,y) = (-1/2, -3/4) \notin D\,.$$

Pertanto, non ci sono punti estremanti all'interno di D. Poiché f è continua e l'insieme D è chiuso e limitato, per il Teorema di Weierstrass la funzione ammette almeno un punto di massimo ed un punto di minimo assoluto in D. Poiché all'interno di D, come appena visto, non vi sono estremanti, essi saranno necessariamente sulla frontiera. Per determinarli, studiamo la restrizione di f alla frontiera di D.

- lato $a := \{x = 0,\ y \in [0,1]\}$:

$$f(0,y) = y =: g_1(y) \qquad \text{da cui} \qquad g_1'(y) = 1 > 0\,;$$

quindi la funzione è crescente quando $y \in [0,1]$. Pertanto $(0,0)$ è punto di minimo per f vincolato al lato a, mentre $(0,1)$ è punto di massimo per f vincolato al lato a.

- lato $b := \{y = 0,\ x \in [0,1]\}$:

$$f(x,0) = 2x^3 =: g_2(x) \qquad \text{da cui} \qquad g_2'(x) = 6x^2 \geq 0\,;$$

quindi la funzione è crescente quando $x \in [0,1]$. Pertanto $(0,0)$ è punto di minimo per f vincolato al lato b, mentre $(1,0)$ è punto di massimo per f vincolato al lato b.

- lato $c := \{y = 1 - x^2,\ x \in [0,1]\}$:

$$f\big(x, 1-x^2\big) = -x^2 + 2x + 1 =: g_3(x) \qquad \text{da cui} \qquad g_3'(x) = -2x + 2\,;$$

che è sempre non negativa per $x \in [0,1]$. Quindi la funzione è sempre crescente. Pertanto $(1,0)$ è punto di massimo per f vincolati al lato c, mentre $(0,1)$ è punto di minimo per f vincolato al lato c.

Pertanto, essendoci un unico candidato a punto di massimo ed un unico candidato a punto di minimo, si avrà che $(0,0)$ è punto di minimo assoluto per f su D, mentre $(1,0)$ è punto di massimo assoluto per f su D.

Esercizio 5

Osserviamo che le soluzioni dell'equazione proposta sono date dall'insieme delle soluzioni delle due equazioni

$$z^2 - 4i = 0 \qquad \text{e} \qquad z^3 + 27 = 0\,.$$

La prima equazione consiste nel determinare le due radici quadrate di $4i$, mentre la seconda consiste nel determinare le tre radici cubiche di -27; ovvero

$$z = \sqrt{4i} = \begin{cases} 2\,[\cos(\pi/4) + i\sin(\pi/4)] = \sqrt{2} + i\sqrt{2} \\ 2\,[\cos(5\pi/4) + i\sin(5\pi/4)] = -\sqrt{2} - i\sqrt{2} \end{cases}$$

$$z = \sqrt[3]{-27} = \begin{cases} 3[\cos(\pi) + i\sin(\pi)] = -3 \\ 3[\cos(\pi/3) + i\sin(\pi/3)] = 3/2 + i3\sqrt{3}/2 \\ 3[\cos(5\pi/3) + i\sin(5\pi/3)] = 3/2 - i3\sqrt{3}/2 \end{cases}\,.$$

Esercizio 6

Condizione necessaria affinché il punto stazionario $(1,1)$ sia di minimo per f è che la matrice Hessiana in tale punto sia *semidefinita positiva*, cioè abbia tutti gli autovalori ≥ 0. Poiché nel nostro caso gli autovalori di $H_f(1,1)$ sono -4 e 0, cioè sono ≤ 0 (e quindi la matrice è semidefinita negativa), $(1,1)$ NON può essere punto di minimo.

SOLUZIONI COMPITO C

Esercizio 1

Posto

$$a_n := \left(1+\frac{1}{2n}\right)^{\frac{n+3}{n^3+1}} \geq 0\,,$$

si ottiene facilmente che

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{2n}\right)^{\frac{n+3}{n^3+1}} = 1 \neq 0\,.$$

Pertanto, il termine generale, non essendo infinitesimo, non soddisfa la condizione necessaria per la convergenza della serie, e quindi la serie proposta diverge.

Esercizio 2

L'equazione differenziale proposta è un'equazione lineare del secondo ordine a coefficienti costanti, la cui equazione caratteristica associata è

$$2\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0\,.$$

Essa ha come soluzioni $\lambda = \frac{-1\pm 3i}{2}$, pertanto l'integrale generale dell'omogenea associata è dato da

$$y_0(x) = \mathrm{e}^{-x/2}\left[C_1\cos(3x/2) + C_2\sin(3x/2)\right].$$

Dal metodo di somiglianza si ricava anche che una soluzione particolare è data da $y_p(x) = \mathrm{e}^{2x}/2$, quindi l'integrale generale dell'equazione proposta sarà

$$y(x) = \mathrm{e}^{-x/2}\left[C_1\cos(3x/2) + C_2\sin(3x/2)\right] + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}\,.$$

Imponendo, infine, le condizioni iniziali, si ricava

$$y(x) = 2\mathrm{e}^{-x/2}\cos(3x/2) + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}\,.$$

Esercizio 3

Poiché $f \geq 0$ nell'intervallo $[1,2]$, l'area richiesta sarà data da

$$A := \int_1^2 \frac{\mathrm{e}^{-1/x}\log(1+\mathrm{e}^{-1/x})}{x^2}\,dx\,.$$

Effettuando il cambiamento di variabile $y = 1+\mathrm{e}^{-1/x}$, da cui $dy = \frac{1}{x^2}\,\mathrm{e}^{-1/x}\,dx$, $y(1) = 1+1/\mathrm{e}$ e $y(2) = 1+1/\sqrt{\mathrm{e}}$, si ricava

$$\begin{aligned} A &= \int_{1+1/\mathrm{e}}^{1+1/\sqrt{\mathrm{e}}} \log y\;dy = y\log y\Big|_{1+1/\mathrm{e}}^{1+1/\sqrt{\mathrm{e}}} - \int_{1+1/\mathrm{e}}^{1+1/\sqrt{\mathrm{e}}} \frac{y}{y}\;dy \\ &= \left(1+\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}\right)\log(1+1/\sqrt{\mathrm{e}}) - \left(1+\frac{1}{\mathrm{e}}\right)\log(1+1/\mathrm{e}) - \frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}} + \frac{1}{\mathrm{e}}\,. \end{aligned}$$

Esercizio 4

All'interno dell'insieme D, poiché la funzione è regolare, procediamo cercando i punti stazionari, cioè i punti che annullano il gradiente:

$$\begin{cases} f_x(x,y) = -2y - 6x^2 = 0 \\ f_y(x,y) = -2x - 1 = 0\,, \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad (x,y) = (-1/2, -3/4) \notin D\,.$$

Pertanto, non ci sono punti estremanti all'interno di D. Poiché f è continua e l'insieme D è chiuso e limitato, per il Teorema di Weierstrass la funzione ammette almeno un punto di massimo ed un punto di minimo assoluto in D. Poiché all'interno di D, come appena visto, non vi sono estremanti, essi saranno necessariamente sulla frontiera. Per determinarli, studiamo la restrizione di f alla frontiera di D.

• lato $a := \{x = 0,\ y \in [0,1]\}$:

$$f(0,y) = -y =: g_1(y) \qquad \text{da cui} \qquad g_1'(y) = -1 < 0\,;$$

quindi la funzione è decrescente quando $y \in [0,1]$. Pertanto $(0,0)$ è punto di massimo per f vincolato al lato a, mentre $(0,1)$ è punto di minimo per f vincolato al lato a.

• lato $b := \{y = 0,\ x \in [0,1]\}$:

$$f(x,0) = -2x^3 =: g_2(x) \qquad \text{da cui} \qquad g_2'(x) = -6x^2 \le 0\,;$$

quindi la funzione è decrescente quando $x \in [0,1]$. Pertanto $(0,0)$ è punto di massimo per f vincolato al lato b, mentre $(1,0)$ è punto di minimo per f vincolato al lato b.

• lato $c := \{y = 1 - x^2,\ x \in [0,1]\}$:

$$f\big(x, 1 - x^2\big) = x^2 - 2x - 1 =: g_3(x) \qquad \text{da cui} \qquad g_3'(x) = 2x - 2\,;$$

che è sempre non positiva per $x \in [0,1]$. Quindi la funzione è sempre decrescente. Pertanto $(0,0)$ è punto di massimo per f vincolati al lato c, mentre $(1,0)$ è punto di minimo per f vincolato al lato c.

Pertanto, essendoci un unico candidato a punto di massimo ed un unico candidato a punto di minimo, si avrà che $(0,0)$ è punto di massimo assoluto per f su D, mentre $(1,0)$ è punto di minimo assoluto per f su D.

Esercizio 5

Osserviamo che le soluzioni dell'equazione proposta sono date dall'insieme delle soluzioni delle due equazioni

$$z^2 + 4 = 0 \qquad \text{e} \qquad z^3 + 27i = 0\,.$$

La prima equazione consiste nel determinare le due radici quadrate di -4, mentre la seconda consiste nel determinare le tre radici cubiche di $-27i$; ovvero

$$z = \sqrt{-4} = \begin{cases} 2\,[\cos(\pi/2) + i\sin(\pi/2)] = 2i \\ 2\,[\cos(3\pi/2) + i\sin(3\pi/2)] = -2i \end{cases}$$

$$z = \sqrt[3]{-27i} = \begin{cases} 3[\cos(\pi/2) + i\sin(\pi/2)] = 3i \\ 3[\cos(7\pi/6) + i\sin(7\pi/6)] = -3\sqrt{3}/2 - i3/2 \\ 3[\cos(11\pi/6) + i\sin 11\pi/6)] = 3\sqrt{3}/2 - i3/2 \end{cases} .$$

Esercizio 6

Condizione necessaria affinché il punto stazionario $(-1,-1)$ sia di massimo per f è che la matrice Hessiana in tale punto sia *semidefinita negativa*, cioè abbia tutti gli autovalori ≤ 0. Poiché nel nostro caso gli autovalori di $H_f(-1,-1)$ sono 5 e 0, cioè sono ≥ 0 (e quindi la matrice è semidefinita positiva), $(-1,-1)$ NON può essere punto di massimo.

SOLUZIONI COMPITO D

Esercizio 1
Posto

$$a_n := \left(1+\frac{3}{n}\right)^{\frac{n^4+1}{n^4+5}} \geq 0\,,$$

si ottiene facilmente che

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)^{\frac{n^4+1}{n^4+5}} = 1 \neq 0\,.$$

Pertanto, il termine generale, non essendo infinitesimo, non soddisfa la condizione necessaria per la convergenza della serie, e quindi la serie proposta diverge.

Esercizio 2
L'equazione differenziale proposta è un'equazione lineare del secondo ordine a coefficienti costanti, la cui equazione caratteristica associata è

$$\lambda^2 - 4\lambda + 13 = 0\,.$$

Essa ha come soluzioni $\lambda = 2 \pm 3i$, pertanto l'integrale generale dell'omogenea associata è dato da

$$y_0(x) = \mathrm{e}^{2x}\left[C_1\cos(3x) + C_2\sin(3x)\right].$$

Dal metodo di somiglianza si ricava anche che una soluzione particolare è data da $y_p(x) = \mathrm{e}^x/5$, quindi l'integrale generale dell'equazione proposta sarà

$$y(x) = \mathrm{e}^{2x}\left[C_1\cos(3x) + C_2\sin(3x)\right] + \frac{1}{5}\mathrm{e}^x\,.$$

Imponendo, infine, le condizioni iniziali, si ricava

$$y(x) = -\frac{1}{15}\mathrm{e}^{2x}\sin(3x) + \frac{1}{5}\mathrm{e}^x\,.$$

Esercizio 3
Poiché $f \geq 0$ nell'intervallo $[1,2]$, l'area richiesta sarà data da

$$A := \int_1^2 2\frac{\mathrm{e}^{1/x^2}\log(1+\mathrm{e}^{1/x^2})}{x^3}\,dx\,.$$

Effettuando il cambiamento di variabile $y = 1+\mathrm{e}^{1/x^2}$, da cui $dy = -\frac{2}{x^3}\,\mathrm{e}^{1/x^2}\,dx$, $y(1) = 1+\mathrm{e}$ e $y(2) = 1+\mathrm{e}^{1/4}$, si ricava

$$\begin{aligned} A &= -\int_{1+\mathrm{e}}^{1+\sqrt[4]{\mathrm{e}}} \log y\,dy = \int_{1+\sqrt[4]{\mathrm{e}}}^{1+\mathrm{e}} \log y\,dy = y\log y\Big|_{1+\sqrt[4]{\mathrm{e}}}^{1+\mathrm{e}} - \int_{1+\sqrt[4]{\mathrm{e}}}^{1+\mathrm{e}} \frac{y}{y}\,dy \\ &= (1+\mathrm{e})\log(1+\mathrm{e}) - (1+\sqrt[4]{\mathrm{e}})\log(1+\sqrt[4]{\mathrm{e}}) - \mathrm{e} + \sqrt[4]{\mathrm{e}}\,. \end{aligned}$$

Esercizio 4
All'interno dell'insieme D, poiché la funzione è regolare, procediamo cercando i punti stazionari, cioè i punti che annullano il gradiente:

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 2y - 6x^2 = 0 \\ f_y(x,y) = 2x - 1 = 0\,, \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad (x,y) = (1/2, 3/4) \notin D\,.$$

Pertanto, non ci sono punti estremanti all'interno di D. Poiché f è continua e l'insieme D è chiuso e limitato, per il Teorema di Weierstrass la funzione ammette almeno un punto di massimo ed un punto di minimo assoluto in D. Poiché all'interno di D, come appena visto, non vi sono estremanti, essi saranno necessariamente sulla frontiera. Per determinarli, studiamo la restrizione di f alla frontiera di D.

• lato $a := \{x = 0,\ y \in [0,1]\}$:

$$f(0,y) = -y =: g_1(y) \qquad \text{da cui} \qquad g_1'(y) = -1 < 0\,;$$

quindi la funzione è decrescente quando $y \in [0,1]$. Pertanto $(0,0)$ è punto di massimo per f vincolato al lato a, mentre $(0,1)$ è punto di minimo per f vincolato al lato a.

• lato $b := \{y = 0,\ x \in [0,1]\}$:

$$f(x,0) = -2x^3 =: g_2(x) \qquad \text{da cui} \qquad g_2'(x) = -6x^2 \leq 0\,;$$

quindi la funzione è decrescente quando $x \in [0,1]$. Pertanto $(0,0)$ è punto di massimo per f vincolato al lato b, mentre $(1,0)$ è punto di minimo per f vincolato al lato b.

• lato $c := \{y = (x-1)^2,\ x \in [0,1]\}$:

$$f\big(x,(x-1)^2\big) = -5x^2 + 4x - 1 =: g_3(x) \qquad \text{da cui} \qquad g_3'(x) = -10x + 4\,;$$

quindi la funzione è crescente quando $x \in [0, 2/5)$ e decrescente quando $x \in (2/5, 1]$. Pertanto $(0,1)$ e $(1,0)$ sono punti di minimo per f vincolati al lato c, mentre $(2/5, 9/25)$ è punto di massimo per f vincolato al lato c.

Poiché

$$\begin{cases} f(0,1) = -1 \\ f(1,0) = -2 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \begin{cases} f(0,0) = 0 \\ f(2/5, 9/25) = -1/5 \end{cases}$$

si ricava subito che $(0,0)$ è punto di massimo assoluto per f su D, mentre $(1,0)$ è punto di minimo assoluto per f su D.

Esercizio 5
Osserviamo che le soluzioni dell'equazione proposta sono date dall'insieme delle soluzioni delle due equazioni

$$z^2 - 1 = 0 \qquad \text{e} \qquad z^3 - 8i = 0\,.$$

La prima equazione consiste nel determinare le due radici quadrate di 1, mentre la seconda consiste nel determinare le tre radici cubiche di $8i$; ovvero

$$z = \sqrt{1} = \pm 1$$

$$z = \sqrt[3]{8i} = \begin{cases} 2[\cos(\pi/6) + i\sin(\pi/6)] = \sqrt{3} + i \\ 2[\cos(5\pi/6) + i\sin(5\pi/6)] = -\sqrt{3} + i \\ 2[\cos(3\pi/2) + i\sin(3\pi/2)] = -2i \end{cases} \quad .$$

Esercizio 6
Condizione necessaria affinché il punto stazionario $(-2,1)$ sia di minimo per f è che la matrice Hessiana in tale punto sia *semidefinita positiva*, cioè abbia tutti gli autovalori ≤ 0. Poiché nel nostro caso gli autovalori di $H_f(-2,1)$ sono $\sqrt{5}$ e $-\sqrt{5}$, cioè sono discordi (e quindi la matrice è indefinita), $(-2,1)$ NON può essere punto di minimo (in realtà esso è punto di sella).