SOLUZIONI COMPITO del 13/06/2011
ANALISI 1 - MECCANICA 9 CFU
CALCOLO DIFF. e INT. I+II - MECCANICA 11 CFU

TEMA A

Esercizio 1

Per determinare l'insieme di definizione, dobbiamo imporre le condizioni $1 + x^2 > 0$, che è sempre verificata, e $x^2 - 1 \neq 0$, che fornisce $x \neq \pm 1$. Quindi

$$D = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)\,.$$

Calcoliamo, ora, i limiti alla frontiera:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3}{x^2} = \pm\infty\,;$$
$$\lim_{x\to -1^\pm} f(x) = \lim_{x\to -1^\pm} \frac{-1+\log 2}{-2(x+1)} = \pm\infty \quad \Longrightarrow \quad x = -1 \text{ è asintoto verticale;}$$
$$\lim_{x\to 1^\pm} f(x) = \lim_{x\to 1^\pm} \frac{1+\log 2}{2(x-1)} = \pm\infty \quad \Longrightarrow \quad x = 1 \text{ è asintoto verticale.}$$

Poiché per $x \to \pm\infty$ la funzione è un infinito di ordine 1, controlliamo se sono presenti degli asintoti obliqui:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3}{x^2 \cdot x} = 1 \quad \Longrightarrow \quad m = 1\,;$$
$$\lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - x] = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3 + \log(1+x^2) - x^3 + x}{x^2 - 1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{x^2} = 0 \quad \Longrightarrow \quad q = 0\,;$$

pertanto, la retta $y = x$ è asintoto obliquo a $\pm\infty$.

Esercizio 2

Moltiplicando numeratore e denominatore per $2 - i\sqrt{3}$ si ottiene

$$z = \frac{-1+3\sqrt{3}i}{2+i\sqrt{3}}\,\frac{2-i\sqrt{3}}{2-i\sqrt{3}} = \frac{7+7\sqrt{3}i}{7} = 1 + \sqrt{3}i = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2\mathrm{e}^{i\pi/3}\,.$$

Pertanto,

$$z^{32} = 2^{32}\mathrm{e}^{(10\pi+2\pi/3)i} = 2^{32}\mathrm{e}^{2i\pi/3} = 2^{31}(-1+\sqrt{3}i)\,.$$

Esercizio 3

L'equazione proposta è un'equazione a variabili separabili del primo ordine, che ha un'unica soluzione singolare $y(x) \equiv 0$. Essa però non è soluzione del problema di Cauchy. Pertanto, procediamo con la separazione delle variabili:

$$-\frac{1}{6y^3} = \int \frac{1}{2y^4}\,dy = -\int \frac{1}{3\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{\arccos x}{3} + C\,, \qquad \Longrightarrow \qquad y(x) = -\frac{1}{\sqrt[3]{2\arccos x + C}}\,.$$

Imponendo la condizione iniziale, si ricava

$$1 = -\frac{1}{\sqrt[3]{2\arccos 0 + C}} = -\frac{1}{\sqrt[3]{2\pi/2 + C}}\,, \qquad \Longrightarrow \qquad C = -1-\pi\,.$$

Quindi la soluzione del problema proposto sarà data da

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{1+\pi-2\arccos x}}\,.$$

Esercizio 4
Osserviamo, innanzitutto che $\alpha^2+2>0$; pertanto, ricordando che, per $\varepsilon_n \to 0$, si ha

$$\log(1+\varepsilon_n) \sim \varepsilon_n \qquad \text{e} \qquad \sin\varepsilon_n \sim \varepsilon_n\,,$$

ponendo $\varepsilon_n = \frac{5}{n^{\alpha^2+2}}$ e $\varepsilon_n = \frac{3}{n^2}$, rispettivamente, il limite proposto può essere riscritto nella forma

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log\left(1+\frac{5}{n^{\alpha^2+2}}\right)+\sin\frac{3}{n^2}}{n^{\alpha-3}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{5}{n^{\alpha^2+2}}+\frac{3}{n^2}}{n^{\alpha-3}}$$

$$= \begin{cases} \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{5}{n^2}+\frac{3}{n^2}}{n^{-3}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{8}{n^{-1}} = +\infty & \text{se } \alpha = 0; \\ \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{3}{n^2}}{n^{\alpha-3}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{3}{n^{\alpha-1}} = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha<0 \text{ e } 0<\alpha<1, \\ 3 & \text{se } \alpha = 1, \\ 0 & \text{se } \alpha>1, \end{cases} & \text{se } \alpha \neq 0. \end{cases}$$

In conclusione, il limite proposto vale $+\infty$ per $\alpha<1$, 3 per $\alpha=1$ e 0 per $\alpha>1$.

Esercizio 5
Prendiamo, ad esempio, la funzione $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{|x-1|} & \text{per } x \geq 0, \\ 1-x & \text{per } x<0. \end{cases}$$

Si verifica facilmente che f è continua su tutto $\mathbb{R}$. Osserviamo che

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{x-1}} & \text{per } x>1, \\ -\dfrac{1}{2\sqrt{1-x}} & \text{per } 0<x<1, \\ -1 & \text{per } x<0. \end{cases}$$

Pertanto

$$\lim_{x\to1^\pm} f'(x) = \pm\infty \qquad \text{quindi } x=1 \text{ è una cuspide;}$$

$$\lim_{x\to0^+} f'(x) = -\frac{1}{2} \qquad \lim_{x\to0^-} f'(x) = -1 \qquad \text{quindi } x=0 \text{ è un punto angoloso.}$$

Esercizio 6
Poiché la funzione proposta è un polinomio, essa è di classe $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$. Per determinare i punti critici, imponiamo l'annullamento delle derivate parziali:

$$\begin{cases} f_x(x,y) = \dfrac{y^2}{2}+y=0\,, \\ f_y(x,y) = y^2+xy+y+x=0\,, \end{cases} \Longrightarrow \quad \begin{cases} y=0\,, \\ x=0\,, \end{cases} \text{ oppure } \begin{cases} y=-2\,, \\ 2-x=0\,, \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} y=-2\,, \\ x=2\,. \end{cases}$$

Quindi si trovano due punti critici $P_1=(0,0)$ e $P_2=(2,-2)$. Calcoliamo ora la matrice Hessiana:

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & y+1 \\ y+1 & 2y+x+1 \end{pmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad \det(Hf(x,y)) = -(y+1)^2<0 \quad \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2 \text{ con } y\neq -1\,.$$

Pertanto, entrambi i punti critici sono dei punti di sella.

TEMA B

Esercizio 1

Per determinare l'insieme di definizione, dobbiamo imporre le condizioni $1+x^4>0$, che è sempre verificata, e $x^4-4\neq 0$, che fornisce $x\neq\pm\sqrt{2}$. Quindi

$$D=(-\infty,-\sqrt{2})\cup(-\sqrt{2},\sqrt{2})\cup(\sqrt{2},+\infty)\,.$$

Calcoliamo, ora, i limiti alla frontiera:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x^5}{x^4}=\pm\infty\,;$$

$$\lim_{x\to-\sqrt{2}^\pm} f(x)=\lim_{x\to-\sqrt{2}^\pm}\frac{-8\sqrt{2}+\log 5}{-8\sqrt{2}(x+\sqrt{2})}=\pm\infty \quad\Longrightarrow\quad x=-\sqrt{2}\text{ è asintoto verticale;}$$

$$\lim_{x\to\sqrt{2}^\pm} f(x)=\lim_{x\to\sqrt{2}^\pm}\frac{8\sqrt{2}+\log 5}{8\sqrt{2}(x-\sqrt{2})}=\pm\infty \quad\Longrightarrow\quad x=\sqrt{2}\text{ è asintoto verticale.}$$

Poiché per $x\to\pm\infty$ la funzione è un infinito di ordine 1, controlliamo se sono presenti degli asintoti obliqui:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x^5}{x^4\cdot x}=2 \quad\Longrightarrow\quad m=2\,;$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-2x]=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x^5+\log(1+x^4)-2x^5+8x}{x^4-4}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{8x}{x^4}=0 \quad\Longrightarrow\quad q=0\,;$$

pertanto, la retta $y=2x$ è asintoto obliquo a $\pm\infty$.

Esercizio 2

Moltiplicando numeratore e denominatore per $\sqrt{3}-3i$ si ottiene

$$z=\frac{4\sqrt{3}i}{\sqrt{3}+3i}\,\frac{\sqrt{3}-3i}{\sqrt{3}-3i}=\frac{12\sqrt{3}+12i}{12}=\sqrt{3}+i=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=2\mathrm{e}^{i\pi/6}\,.$$

Pertanto,

$$z^{24}=2^{24}\mathrm{e}^{4i\pi}=2^{24}\,.$$

Esercizio 3

L'equazione proposta è un'equazione a variabili separabili del primo ordine, che ha un'unica soluzione singolare $y(x)\equiv 0$. Essa però non è soluzione del problema di Cauchy. Pertanto, procediamo con la separazione delle variabili:

$$-\frac{1}{y}=\int\frac{1}{y^2}\,dy=\int\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=\arcsin x+C\,, \qquad\Longrightarrow\qquad y(x)=-\frac{1}{\arcsin x+C}\,.$$

Imponendo la condizione iniziale, si ricava

$$1=-\frac{1}{\arcsin 0+C}=-\frac{1}{C}\,, \qquad\Longrightarrow\qquad C=-1\,.$$

Quindi la soluzione del problema proposto sarà data da

$$y(x)=\frac{1}{1-\arcsin x}\,.$$

Esercizio 4
Osserviamo, innanzitutto che $\alpha^2+1>0$; pertanto, ricordando che, per $\varepsilon_n \to 0$, si ha

$$\sin \varepsilon_n \sim \varepsilon_n \qquad \text{e} \qquad \log(1+\varepsilon_n) \sim \varepsilon_n\,,$$

ponendo $\varepsilon_n = \frac{1}{n^{\alpha^2+1}}$ e $\varepsilon_n = \frac{2}{n}$, rispettivamente, il limite proposto può essere riscritto nella forma

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{n^{\alpha^2+1}}\right) - \log\left(1+\frac{2}{n}\right)}{n^{2-\alpha}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n^{\alpha^2+1}} - \frac{2}{n}}{n^{2-\alpha}}$$

$$= \begin{cases} \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n}-\frac{2}{n}}{n^2} = \lim_{n\to+\infty} -\frac{1}{n^3} = 0 & \text{se } \alpha = 0; \\ \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{-\frac{2}{n}}{n^{2-\alpha}} = \lim_{n\to+\infty} -\frac{2}{n^{3-\alpha}} = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha<0 \text{ e } 0<\alpha<3, \\ -2 & \text{se } \alpha = 3, \\ -\infty & \text{se } \alpha>3, \end{cases} & \text{se } \alpha \neq 0. \end{cases}$$

In conclusione, il limite proposto vale 0 per $\alpha<3$, -2 per $\alpha=3$ e $-\infty$ per $\alpha>3$.

Esercizio 5
Prendiamo, ad esempio, la funzione $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x} & \text{per } x \le 1, \\ (x-2)^3+2 & \text{per } x>1. \end{cases}$$

Si verifica facilmente che f è continua su tutto $\mathbb{R}$. Osserviamo che

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} & \text{per } x<0 \text{ e } 0<x<1, \\ 3(x-2)^2 & \text{per } x>1. \end{cases}$$

Pertanto, $f' \ge 0$ in un intorno di $x=2$ e

$$\lim_{x\to 0^{\pm}} f'(x) = +\infty \qquad \text{quindi } x=0 \text{ è punto di flesso a tangente verticale;}$$
$$\lim_{x\to 2} f'(x) = f'(2) = 0 \qquad \text{quindi } x=0 \text{ è un punto di flesso a tangente orizzontale.}$$

Esercizio 6
Poiché la funzione proposta è un polinomio, essa è di classe $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$. Per determinare i punti critici, imponiamo l'annullamento delle derivate parziali:

$$\begin{cases} f_x(x,y) = \dfrac{y^2}{2} + y = 0\,, \\ f_y(x,y) = y^2+xy+y+x = 0\,, \end{cases} \implies \begin{array}{l} \begin{cases} y=0\,, \\ x=0\,, \end{cases} \\ \text{oppure} \\ \begin{cases} y=-2\,, \\ 2-x=0\,, \end{cases} \implies \begin{cases} y=-2\,, \\ x=2\,. \end{cases} \end{array}$$

Quindi si trovano due punti critici $P_1=(0,0)$ e $P_2=(2,-2)$. Calcoliamo ora la matrice Hessiana:

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & y+1 \\ y+1 & 2y+x+1 \end{pmatrix} \implies \det(Hf(x,y)) = -(y+1)^2 < 0 \quad \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2 \text{ con} y \neq -1\,.$$

Pertanto, entrambi i punti critici sono dei punti di sella.