## 13 DICEMBRE 2002 — SOLUZIONI COMPITO A

**Esercizio 1.**

- La funzione proposta è definita su tutto l'asse reale, pertanto $C.E. = I\!R$. Poiché per $x < -2$ e $x > 0$, si ha $x^2 + 2x > 0$, utilizzando i limiti notevoli, otteniamo

$$\lim_{x\to+\infty}\left[x - \sqrt{|x^2+2x|}\right] = \lim_{x\to+\infty} -x\left[\sqrt{1+2/x} - 1\right] = \lim_{x\to+\infty} -x\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{x} = -1 \;;$$

pertanto $y = -1$ è asintoto orizzontale per $x \to +\infty$. Invece,

$$\lim_{x\to-\infty}\left[x - \sqrt{|x^2+2x|}\right] = \lim_{x\to-\infty}[x - |x|] = \lim_{x\to-\infty} 2x = -\infty \;.$$

Poiché, per $x \to -\infty$, la funzione è infinita di ordine 1 rispetto ad $x$, studiamo se c'è asintoto obliquo. Dai calcoli fatti precedentemente si ricava

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{x} = 2$$

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x) - 2x] = -\lim_{x\to-\infty}\left[x + \sqrt{x^2+2x}\right] = -\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2 - (x^2+2x)}{x - \sqrt{x^2+2x}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{2x} = 1 \;,$$

dove, nell'ultimo passaggio abbiamo utilizzato il fatto che, per $x \to -\infty$, $\sqrt{x^2+2x} \sim |x| = -x$. Pertanto, $y = 2x + 1$ è asintoto obliquo per $x \to -\infty$.

- Osserviamo che la funzione proposta è continua in tutto $I\!R$, in quanto somma e composizione di funzioni continue. Possiamo riscrivere

$$f(x) = \begin{cases} x - \sqrt{x^2+2x} & \text{se } x < -2,\; x > 0 \;; \\ x - \sqrt{-x^2-2x} & \text{se } -2 \le x \le 0 \;; \end{cases}$$

pertanto

$$f'(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+2x}} & \text{se } x < -2,\; x > 0 \;; \\ 1 + \dfrac{x+1}{\sqrt{-x^2-2x}} & \text{se } -2 < x < 0 \;; \end{cases}$$

ed inoltre

$$\lim_{x\to-2^\pm} f'(x) = \mp\infty \qquad \lim_{x\to0^\pm} f'(x) = \mp\infty$$

quindi i punti $x = -2$ e $x = 0$ sono punti di non derivabilità, dove $f$ presenta due cuspidi. Dallo studio del segno di $f'(x)$, si ottiene

$$\begin{aligned} &f'(x) > 0 \qquad \text{per } \; x < -2 \;,\; -1 - 1/\sqrt{2} < x < 0 \;, \\ &f'(x) < 0 \qquad \text{per } \; -2 < x < -1 - 1/\sqrt{2} \;,\; x > 0 \;, \\ &f'(x) = 0 \qquad \text{per } \; x = -1 - 1/\sqrt{2} \quad \text{che risulta essere un punto di minimo relativo} \;, \end{aligned}$$

inoltre, i punti $x = -2$ e $x = 0$ sono punti di massimo relativo. Infine

$$f''(x) = \frac{1}{\sqrt{|x^2+2x|^3}} \qquad \text{per } \; x < -2,\; -2 < x < 0 \;, x > 0 \;;$$

da cui si ottiene che $f''(x)$ è sempre positiva, dove è definita e quindi $f$ è convessa. Per completezza, osserviamo che nei due punti di massimo relativo si ha: $f(-2) = -2$, $f(0) = 0$; pertanto $x = 0$ è punto di massimo assoluto.

Il grafico è

**Esercizio 2.**

Poniamo $a_n(x) = n^x \log(1+1/n)$ e ricordiamo che $\log(1+1/n) \sim 1/n$.

- Per $x = 1$, si ottiene che $a_n(1) = n\log(1+1/n) \sim n \cdot \frac{1}{n} = 1$; pertanto la serie proposta non converge, poiché il termine generale non è infinitesimo.
- Per $x \in I\!R$, si ottiene

$$a_n(x) = n^x \log(1+1/n) \sim n^x \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^{1-x}} \ ,$$

pertanto, per confronto con la serie armonica generalizzata, la serie proposta converge per $1 - x > 1$, cioè $x < 0$, mentre diverge per $x \geq 0$.

**Esercizio 3.**

Applicando il teorema di riduzione degli integrali doppi, si ottiene

$$\begin{aligned}\iint_E x\mathrm{e}^{x-y}\ dx\ dy &= \int_0^1 x\mathrm{e}^x \left(\int_0^x \mathrm{e}^{-y}\ dy\right)\ dx = \int_0^1 x\mathrm{e}^x(1-\mathrm{e}^{-x})\ dx \\ &= \int_0^1 (x\mathrm{e}^x - x)\ dx = \left(x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^1 = \mathrm{e} - \mathrm{e} - \frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2} \ .\end{aligned}$$

**Esercizio 4.**

Osservando che $f(0,y) = y/|y|$, si ottiene subito che il limite proposto non esiste, poiché

$$\lim_{y\to 0^\pm} f(0,y) = \lim_{y\to 0^\pm} \frac{y}{|y|} = \pm 1 \ .$$

**Domanda 1.**

- Sia $f : I\!R^2 \to I\!R$ una funzione derivabile in $P_0$ e sia $P_0$ un punto di massimo locale per $f$. Allora $\nabla f(P_0) = (0,0)$.
- Per la dimostrazione, vedere libro di testo. La condizione precedente non è sufficiente per avere un punto di massimo locale; ad esempio la funzione $f(x,y) = x^3 + y^3$ ha gradiente nullo nell'origine, ma tale punto risulta essere una sella.

**Domanda 2.**

- Sia $\{a_n\}$ una successione assegnata. Essa è detta infinitesima se

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0 \ ,$$

cioè, se per ogni $\epsilon > 0$ esiste un indice $n_0 \in I\!N$ tale che per ogni $n \geq n_0$ si ha $|a_n| < \epsilon$.

- Poiché $\sin\left(\tan\frac{1}{n}\right) \sim \tan\frac{1}{n} \sim \frac{1}{n}$, una successione infinitesima di ordine superiore ad essa è data, ad esempio, da $a_n = \frac{1}{n^2}$.

## 13 DICEMBRE 2002 — SOLUZIONI COMPITO B

**Esercizio 1.**

- La funzione proposta è definita su tutto l'asse reale, pertanto $C.E. = \mathbb{R}$. Poiché per $x < 0$ e $x > 2$, si ha $x^2 - 2x > 0$, utilizzando i limiti notevoli, otteniamo

$$\lim_{x\to+\infty}\left[x - 2 - \sqrt{|x^2 - 2x|}\right] = -2 + \lim_{x\to+\infty} -x\left[\sqrt{1 - 2/x} - 1\right] = -2 + \lim_{x\to+\infty} -x \cdot \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{2}{x}\right) = -1 \ ;$$

pertanto $y = -1$ è asintoto orizzontale per $x \to +\infty$. Invece,

$$\lim_{x\to-\infty}\left[x - 2 - \sqrt{|x^2 - 2x|}\right] = -2 + \lim_{x\to-\infty}[x - |x|] = -2 + \lim_{x\to-\infty} 2x = -\infty \ .$$

Poiché, per $x \to -\infty$, la funzione è infinita di ordine 1 rispetto ad $x$, studiamo se c'è asintoto obliquo. Dai calcoli fatti precedentemente si ricava

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{-2+2x}{x} = 2$$

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x) - 2x] = -2 - \lim_{x\to-\infty}\left[x + \sqrt{x^2 - 2x}\right] = -2 - \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2 - (x^2 - 2x)}{x - \sqrt{x^2 - 2x}} = -2 - \lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{2x} = -3,$$

dove, nell'ultimo passaggio abbiamo utilizzato il fatto che, per $x \to -\infty$, $\sqrt{x^2 - 2x} \sim |x| = -x$. Pertanto, $y = 2x - 3$ è asintoto obliquo per $x \to -\infty$.

- Osserviamo che la funzione proposta è continua in tutto $\mathbb{R}$, in quanto somma e composizione di funzioni continue. Possiamo riscrivere

$$f(x) = \begin{cases} x - 2 - \sqrt{x^2 - 2x} & \text{se } x < 0,\ x > 2\ ; \\ x - 2 - \sqrt{-x^2 + 2x} & \text{se } 0 \le x \le 2\ ; \end{cases}$$

pertanto

$$f'(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2 - 2x}} & \text{se } x < 0,\ x > 2\ ; \\ 1 + \dfrac{x-1}{\sqrt{-x^2 + 2x}} & \text{se } 0 < x < 2\ ; \end{cases}$$

ed inoltre

$$\lim_{x\to0^\pm} f'(x) = \mp\infty \qquad \lim_{x\to2^\pm} f'(x) = \mp\infty$$

quindi i punti $x = 0$ e $x = 2$ sono punti di non derivabilità, dove $f$ presenta due cuspidi. Dallo studio del segno di $f'(x)$, si ottiene

$$\begin{aligned} &f'(x) > 0 \qquad \text{per } \ x < 0\ ,\ 1 - 1/\sqrt{2} < x < 2\ , \\ &f'(x) < 0 \qquad \text{per } \ -0 < x < 1 - 1/\sqrt{2}\ ,\ x > 2\ , \\ &f'(x) = 0 \qquad \text{per } \ x = 1 - 1/\sqrt{2} \quad \text{che risulta essere un punto di minimo relativo}\ , \end{aligned}$$

inoltre, i punti $x = 0$ e $x = 2$ sono punti di massimo relativo. Infine

$$f''(x) = \frac{1}{\sqrt{|x^2 - 2x|^3}} \qquad \text{per } \ x < 0,\ 0 < x < 2\ , x > 2\ ;$$

da cui si ottiene che $f''(x)$ è sempre positiva, dove è definita e quindi $f$ è convessa. Per completezza, osserviamo che nei due punti di massimo relativo si ha: $f(0) = -2$, $f(2) = 0$; pertanto $x = 2$ è punto di massimo assoluto.

Il grafico è

**Esercizio 2.**
Poniamo $a_n(x) = \frac{1}{n^x} \arcsin(1/n)$ e ricordiamo che $\arcsin(1/n) \sim 1/n$.

- Per $x = 1$, si ottiene che $a_n(1) = \frac{1}{n} \arcsin(1/n) \sim \frac{1}{n^2}$; pertanto, per confronto con la serie armonica generalizzata di esponente $2 > 1$, la serie proposta converge.
- Per $x \in \mathbb{R}$, si ottiene

$$a_n(x) = \frac{1}{n^x} \arcsin(1/n) \sim \frac{1}{n^{1+x}} \ ,$$

pertanto, per confronto con la serie armonica generalizzata, la serie proposta converge per $1 + x > 1$, cioè $x > 0$, mentre diverge per $x \leq 0$.

**Esercizio 3.**
Applicando il teorema di riduzione degli integrali doppi, si ottiene

$$\begin{aligned}\iint_E y\mathrm{e}^{x+y}\ dx\ dy &= \int_0^1 y\mathrm{e}^y \left( \int_0^y \mathrm{e}^x\ dx \right)\ dy = \int_0^1 y\mathrm{e}^y(\mathrm{e}^y - 1)\ dy = \int_0^1 y(\mathrm{e}^{2y} - \mathrm{e}^y)\ dy \\ &= y\left(\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2y} - \mathrm{e}^y\right) - \frac{1}{4}\mathrm{e}^{2y} + \mathrm{e}^y\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\mathrm{e}^2 - \mathrm{e} - \frac{1}{4}\mathrm{e}^2 + \mathrm{e} + \frac{1}{4} - 1 = \frac{1}{4}(\mathrm{e}^2 - 3)\ .\end{aligned}$$

**Esercizio 4.**
Osservando che $f(0, y) = |y - 1|^3/(y - 1)^3$, si ottiene subito che il limite proposto non esiste, poiché

$$\lim_{y \to 1^\pm} f(0, y) = \lim_{y \to 1^\pm} \frac{|y - 1|^3}{(y - 1)^3} = \pm 1\ .$$

**Domanda 1.**

- Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile in $P_0$ e sia $P_0$ un punto di minimo locale per $f$. Allora $\nabla f(P_0) = (0, 0)$.
- Per la dimostrazione, vedere libro di testo. La condizione precedente non è sufficiente per avere un punto di minimo locale; ad esempio la funzione $f(x, y) = x^3 + y^3$ ha gradiente nullo nell'origine, ma tale punto risulta essere una sella.

**Domanda 2.**

- Sia $\{a_n\}$ una successione assegnata. Essa è detta infinita se

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = +\infty \text{ (oppure } -\infty) \ ,$$

cioè, se per ogni $M > 0$ esiste un indice $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \geq n_0$ si ha $a_n > M$ (oppure $a_n < -M$).

- Poiché $\log(n^2) = 2 \log n$, una successione infinita di ordine superiore ad essa è data, ad esempio, da $a_n = \log^2 n$.

## 13 DICEMBRE 2002 — SOLUZIONI COMPITO C

**Esercizio 1.**

- La funzione proposta è definita su tutto l'asse reale, pertanto $C.E. = I\!R$. Poiché per $x < -2$ e $x > 0$, si ha $x^2 + 2x > 0$, utilizzando i limiti notevoli, otteniamo

$$\lim_{x\to+\infty}\left[x+2-\sqrt{|x^2+2x|}\right] = 2+\lim_{x\to+\infty} -x\left[\sqrt{1+2/x}-1\right] = 2+\lim_{x\to+\infty} -x\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{x} = 1\ ;$$

pertanto $y = 1$ è asintoto orizzontale per $x \to +\infty$. Invece,

$$\lim_{x\to-\infty}\left[x+2-\sqrt{|x^2+2x|}\right] = 2+\lim_{x\to-\infty}[x-|x|] = 2+\lim_{x\to-\infty} 2x = -\infty\ .$$

Poiché, per $x \to -\infty$, la funzione è infinita di ordine 1 rispetto ad $x$, studiamo se c'è asintoto obliquo. Dai calcoli fatti precedentemente si ricava

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{2+2x}{x} = 2$$

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x)-2x] = 2-\lim_{x\to-\infty}\left[x+\sqrt{x^2+2x}\right] = 2-\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-(x^2+2x)}{x-\sqrt{x^2+2x}} = 2+\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{2x} = 3\ ,$$

dove, nell'ultimo passaggio abbiamo utilizzato il fatto che, per $x \to -\infty$, $\sqrt{x^2+2x} \sim |x| = -x$. Pertanto, $y = 2x + 3$ è asintoto obliquo per $x \to -\infty$.

- Osserviamo che la funzione proposta è continua in tutto $I\!R$, in quanto somma e composizione di funzioni continue. Possiamo riscrivere

$$f(x) = \begin{cases} x+2-\sqrt{x^2+2x} & \text{se } x<-2,\ x>0\ ; \\ x+2-\sqrt{-x^2-2x} & \text{se } -2\le x\le 0\ ; \end{cases}$$

pertanto

$$f'(x) = \begin{cases} 1-\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+2x}} & \text{se } x<-2,\ x>0\ ; \\ 1+\dfrac{x+1}{\sqrt{-x^2-2x}} & \text{se } -2<x<0\ ; \end{cases}$$

ed inoltre

$$\lim_{x\to-2^\pm} f'(x) = \mp\infty \qquad \lim_{x\to 0^\pm} f'(x) = \mp\infty$$

quindi i punti $x = -2$ e $x = 0$ sono punti di non derivabilità, dove $f$ presenta due cuspidi. Dallo studio del segno di $f'(x)$, si ottiene

$$\begin{aligned} &f'(x) > 0 && \text{per } x<-2\ ,\ -1-1/\sqrt{2}<x<0\ , \\ &f'(x) < 0 && \text{per } -2<x<-1-1/\sqrt{2}\ ,\ x>0\ , \\ &f'(x) = 0 && \text{per } x=-1-1/\sqrt{2} \quad \text{che risulta essere un punto di minimo relativo}\ , \end{aligned}$$

inoltre, i punti $x = -2$ e $x = 0$ sono punti di massimo relativo. Infine

$$f''(x) = \frac{1}{\sqrt{|x^2+2x|^3}} \qquad \text{per } x<-2,\ -2<x<0\ , x>0\ ;$$

da cui si ottiene che $f''(x)$ è sempre positiva, dove è definita e quindi $f$ è convessa. Per completezza, osserviamo che nei due punti di massimo relativo si ha: $f(-2) = 0$, $f(0) = 2$; pertanto $x = 0$ è punto di massimo assoluto.

Il grafico è

**Esercizio 2.**

Poniamo $a_n(x) = \frac{1}{n^x}(e^{1/n} - 1)$ e ricordiamo che $e^{1/n} - 1 \sim 1/n$.

- Per $x = 1$, si ottiene che $a_n(1) = \frac{1}{n}(e^{1/n} - 1) \sim \frac{1}{n^2}$; pertanto, per confronto con la serie armonica generalizzata di esponente $2 > 1$, la serie proposta converge.
- Per $x \in I\!R$, si ottiene

$$a_n(x) = \frac{1}{n^x}(e^{1/n} - 1) \sim \frac{1}{n^{1+x}} \ ,$$

pertanto, per confronto con la serie armonica generalizzata, la serie proposta converge per $1 + x > 1$, cioè $x > 0$, mentre diverge per $x \leq 0$.

**Esercizio 3.**

Applicando il teorema di riduzione degli integrali doppi, si ottiene

$$\begin{aligned}
\iint_E x e^{x+y}\, dx\, dy &= \int_0^1 x e^x \left( \int_0^x e^y\, dy \right) dx = \int_0^1 x e^x (e^x - 1)\, dx = \int_0^1 x(e^{2x} - e^x)\, dx \\
&= x\left(\frac{1}{2}e^{2x} - e^x\right) - \frac{1}{4}e^{2x} + e^x \Big|_0^1 \\
&= \frac{1}{2}e^2 - e - \frac{1}{4}e^2 + e + \frac{1}{4} - 1 = \frac{1}{4}(e^2 - 3) \ .
\end{aligned}$$

**Esercizio 4.**

Osservando che $f(x,0) = (x-1)^3/|x-1|^3$, si ottiene subito che il limite proposto non esiste, poiché

$$\lim_{x \to 1^\pm} f(x,0) = \lim_{x \to 1^\pm} \frac{(x-1)^3}{|x-1|^3} = \pm 1 \ .$$

**Domanda 1.**

- Sia $f : I\!R^2 \to I\!R$ una funzione derivabile in $P_0$ e sia $P_0$ un punto di minimo locale per $f$. Allora $\nabla f(P_0) = (0,0)$.
- Per la dimostrazione, vedere libro di testo. La condizione precedente non è sufficiente per avere un punto di minimo locale; ad esempio la funzione $f(x,y) = x^3 + y^3$ ha gradiente nullo nell'origine, ma tale punto risulta essere una sella.

**Domanda 2.**

- Sia $\{a_n\}$ una successione assegnata. Essa è detta infinita se

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = +\infty \ (\text{oppure } -\infty) \ ,$$

cioè, se per ogni $M > 0$ esiste un indice $n_0 \in I\!N$ tale che per ogni $n \geq n_0$ si ha $a_n > M$ (oppure $a_n < -M$).

- Poiché $e^{\log n} = n$, una successione infinita di ordine superiore ad essa è data, ad esempio, da $a_n = n^2$.

## 13 DICEMBRE 2002 — SOLUZIONI COMPITO D

**Esercizio 1.**

- La funzione proposta è definita su tutto l'asse reale, pertanto $C.E. = I\!R$. Poiché per $x < -2$ e $x > 0$, si ha $x^2 + 2x > 0$, utilizzando i limiti notevoli, otteniamo

$$\lim_{x\to+\infty}\left[-x+\sqrt{|x^2+2x|}\right] = \lim_{x\to+\infty} x\left[\sqrt{1+2/x}-1\right] = \lim_{x\to+\infty} x\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{x} = 1\ ;$$

pertanto $y = 1$ è asintoto orizzontale per $x \to +\infty$. Invece,

$$\lim_{x\to-\infty}\left[-x+\sqrt{|x^2+2x|}\right] = \lim_{x\to-\infty}[-x+|x|] = -\lim_{x\to-\infty} 2x = +\infty\ .$$

Poiché, per $x \to -\infty$, la funzione è infinita di ordine 1 rispetto ad $x$, studiamo se c'è asintoto obliquo. Dai calcoli fatti precedentemente si ricava

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = -\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{x} = -2$$

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x)+2x] = \lim_{x\to-\infty}\left[x+\sqrt{x^2+2x}\right] = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-(x^2+2x)}{x-\sqrt{x^2+2x}} = -\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{2x} = -1\ ,$$

dove, nell'ultimo passaggio abbiamo utilizzato il fatto che, per $x \to -\infty$, $\sqrt{x^2+2x} \sim |x| = -x$. Pertanto, $y = -(2x+1)$ è asintoto obliquo per $x \to -\infty$.

- Osserviamo che la funzione proposta è continua in tutto $I\!R$, in quanto somma e composizione di funzioni continue. Possiamo riscrivere

$$f(x) = \begin{cases} -x+\sqrt{x^2+2x} & \text{se } x < -2,\ x > 0\ ; \\ -x+\sqrt{-x^2-2x} & \text{se } -2 \le x \le 0\ ; \end{cases}$$

pertanto

$$f'(x) = \begin{cases} -1+\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+2x}} & \text{se } x < -2,\ x > 0\ ; \\ -1-\dfrac{x+1}{\sqrt{-x^2-2x}} & \text{se } -2 < x < 0\ ; \end{cases}$$

ed inoltre

$$\lim_{x\to-2^\pm} f'(x) = \pm\infty \qquad \lim_{x\to0^\pm} f'(x) = \pm\infty$$

quindi i punti $x = -2$ e $x = 0$ sono punti di non derivabilità, dove $f$ presenta due cuspidi. Dallo studio del segno di $f'(x)$, si ottiene

$$\begin{aligned} &f'(x) < 0 && \text{per } \ x < -2\ ,\ -1-1/\sqrt{2} < x < 0\ , \\ &f'(x) > 0 && \text{per } \ -2 < x < -1-1/\sqrt{2}\ ,\ x > 0\ , \\ &f'(x) = 0 && \text{per } \ x = -1-1/\sqrt{2} \quad \text{che risulta essere un punto di massimo relativo}\ , \end{aligned}$$

inoltre, i punti $x = -2$ e $x = 0$ sono punti di minimo relativo. Infine

$$f''(x) = -\frac{1}{\sqrt{|x^2+2x|^3}} \qquad \text{per } \ x < -2,\ -2 < x < 0\ , x > 0\ ;$$

da cui si ottiene che $f''(x)$ è sempre negativa, dove è definita e quindi $f$ è concava. Per completezza, osserviamo che nei due punti di minimo relativo si ha: $f(-2) = 2$, $f(0) = 0$; pertanto $x = 0$ è punto di minimo assoluto.

Il grafico è

**Esercizio 2.**
Poniamo $a_n(x) = n^x \arctan(1/n)$ e ricordiamo che $\arctan(1/n) \sim 1/n$.

- Per $x = 1$, si ottiene che $a_n(1) = n \arctan(1/n) \sim n \cdot \frac{1}{n} = 1$, pertanto la serie proposta non converge, poiché il termine generale non è infinitesimo.
- Per $x \in \mathbb{R}$, si ottiene

$$a_n(x) = n^x \arctan(1/n) \sim n^x \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^{1-x}} \ ,$$

pertanto, per confronto con la serie armonica generalizzata, la serie proposta converge per $1 - x > 1$, cioè $x < 0$, mentre diverge per $x \geq 0$.

**Esercizio 3.**
Applicando il teorema di riduzione degli integrali doppi, si ottiene

$$\begin{aligned}\iint_E y\mathrm{e}^{y-x}\ dx\ dy &= \int_0^1 y\mathrm{e}^y \left(\int_0^y \mathrm{e}^{-x}\ dx\right)\ dy = \int_0^1 y\mathrm{e}^y(1-\mathrm{e}^{-y})\ dy \\ &= \int_0^1 (y\mathrm{e}^y - y)\ dx = \left(y\mathrm{e}^y - \mathrm{e}^y - \frac{y^2}{2}\right)\Big|_0^1 = \mathrm{e} - \mathrm{e} - \frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}\ .\end{aligned}$$

**Esercizio 4.**
Osservando che $f(x,0) = |x|/x$, si ottiene subito che il limite proposto non esiste, poiché

$$\lim_{x \to 0^\pm} f(x,0) = \lim_{x \to 0^\pm} \frac{|x|}{x} = \pm 1\ .$$

**Domanda 1.**

- Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile in $P_0$ e sia $P_0$ un punto di massimo locale per $f$. Allora $\nabla f(P_0) = (0,0)$.
- Per la dimostrazione, vedere libro di testo. La condizione precedente non è sufficiente per avere un punto di massimo locale; ad esempio la funzione $f(x,y) = x^3 + y^3$ ha gradiente nullo nell'origine, ma tale punto risulta essere una sella.

**Domanda 2.**

- Sia $\{a_n\}$ una successione assegnata. Essa è detta infinitesima se

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = 0\ ,$$

cioè, se per ogni $\epsilon > 0$ esiste un indice $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \geq n_0$ si ha $|a_n| < \epsilon$.

- Poiché $\tan\left(\arcsin \frac{1}{n}\right) \sim \arcsin \frac{1}{n} \sim \frac{1}{n}$, una successione infinitesima di ordine superiore ad essa è data, ad esempio, da $a_n = \frac{1}{n^2}$.