SOLUZIONI COMPITO del 14/06/2011
ANALISI 1 - BIAR/BSIR 12 CFU
ANLISI 1 (I MODULO e/o II MODULO) - INFORMATICA + AUTOMATICA 5 o 5+5 CFU

TEMA A

Esercizio 1

Per determinare l'insieme di definizione, dobbiamo imporre le condizioni $x > 0$, e $x^2 - 4x + 3 \neq 0$, che fornisce $x \neq 1$ e $x \neq 3$. Quindi $D = (0,1) \cup (1,3) \cup (3,+\infty)$. Calcoliamo, ora, i limiti alla frontiera:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^2 e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = 0 \quad \Longrightarrow \quad y = 0 \text{ è asintoto orizzontale;}$$

$$\lim_{x\to 3^\pm} f(x) = \lim_{x\to 3^\pm} \frac{6 + 2\log 3}{2e^3(x-3)} = \pm\infty \quad \Longrightarrow \quad x = 3 \text{ è asintoto verticale;}$$

$$\lim_{x\to 1^\pm} f(x) = \lim_{x\to 1^\pm} \frac{(x+2)(x-1)}{e^x(x-1)(x-3)} = -\frac{3}{2e} \quad \Longrightarrow \quad f \text{ è prolungabile con continuità in } x = 1;$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{2\log x}{3} = -\infty \quad \Longrightarrow \quad x = 0 \text{ è asintoto verticale.}$$

Notiamo che nel terzo limite abbiamo utilizzato il fatto che, per $x \to 1$, $\log x = \log[1 + (x-1)] \sim (x-1)$.

Esercizio 2

Innanzitutto riscriviamo il numero complesso nella sua forma algebrica, moltiplicando e dividendo numeratore e denominatore per $3 - i$. In tal modo otteniamo

$$\frac{4-2i}{3+i}\,\frac{3-i}{3-i} = \frac{10-10i}{10} = 1 - i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}\right).$$

Il numero ottenuto si può esprimere in forma esponenziale come $\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}e^{-\pi i/4}$. Pertanto,

$$\sqrt[5]{\frac{4-2i}{3+i}} = \sqrt[5]{\sqrt{2}e^{-\pi i/4}} = \sqrt[10]{2}\cdot \begin{cases} e^{-\pi i/20} \\ e^{7\pi i/20} \\ e^{15\pi i/20} = e^{3\pi i/4} \\ e^{23\pi i/20} \\ e^{31\pi i/20}. \end{cases}$$

Esercizio 3

Utilizzando il criterio della radice e tenendo conto della gerarchia degli infiniti, otteniamo

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{n^{3n}}{e^{n^2} + 4n^5}} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{n^{3n}}{e^{n^2}\left(1 + \frac{4n^5}{e^{n^2}}\right)}} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{n^{3n}}{e^{n^2}}} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n^3}{e^n}\right)^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^3}{e^n} = 0\,.$$

Pertanto, il criterio afferma che la serie proposta converge.

Domanda 1

Consideriamo, ad esempio, la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x-2} & \text{per } x \geq -1, \\ 1 - \sqrt[3]{3} + x & \text{per } x < -1. \end{cases}$$

Si verifica facilmente che f è continua su tutto $\mathbb{R}$. Osserviamo che

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{3\sqrt[3]{(x-2)^2}} & \text{per } -1 < x < 2 \text{ e } x > 2, \\ 1 & \text{per } x < -1. \end{cases}$$

Pertanto

$$\lim_{x\to 2^\pm} f'(x) = +\infty \qquad \text{quindi } x = 2 \text{ è un punto di flesso a tangente verticale;}$$

$$\lim_{x\to -1^+} f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{9}} \qquad \lim_{x\to -1^-} f'(x) = 1 \qquad \text{quindi } x = -1 \text{ è un punto angoloso.}$$

Esercizio 4
Utilizzando lo sviluppo asintotico $e^{x-1} - 1 \sim x - 1$, per $x \to 1$, ed effettuando un cambiamento in coordinate polari centrate in $(1, 0)$, otteniamo

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{e^{x-1} - 1}{\sqrt{x^2 + y^2 - 2x + 1}} = \lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{x - 1}{\sqrt{(x-1)^2 + y^2}} = \lim_{\rho\to 0^+} \frac{\rho\cos\theta}{\rho} = \lim_{\rho\to 0^+} \cos\theta\,.$$

Poiché il limite dipende da θ, esso non esiste. Infatti, calcolandolo, ad esempio, lungo la retta $x = 1$ si ottiene $f(1, y) \equiv 0 \to 0$ per $(x, y) \to (1, 0)$, mentre calcolandolo, ad esempio, lungo la retta $y = 0$ si ottiene $f(x, 0) = \frac{e^{x-1}-1}{|x-1|} \to \pm 1$ per $(x, y) \to (1^{\pm}, 0)$.

Esercizio 5
Effettuando il cambiamento di variabile $t = 1 + \tan x$, da cui $dt = 1 + \tan^2 x\, dx$, $t(0) = 1$, $t(\pi/4) = 2$, si ricava

$$\int_0^{\pi/4} (1 + \tan^2 x) \log(1 + \tan x)\, dx = \int_1^2 \log t\, dt = t\log t\Big|_1^2 - \int_1^2 t\,\frac{1}{t}\, dt = 2\log 2 - t\Big|_1^2 = 2\log 2 - 1\,,$$

dove, nella seconda uguaglianza, abbiamo utilizzato un'integrazione per parti.

Esercizio 6
Osserviamo che l'equazione differenziale proposta è un'equazione lineare del secondo ordine a coefficienti costanti e non omogenea. L'equazione caratteristica ad essa associata è data da $\lambda^2 + 2\lambda - 8 = 0$, che ha come soluzioni $\lambda = 2$ e $\lambda = -4$. Pertanto, l'integrale generale dell'equazione omogenea associata sarà $y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-4x}$. Utilizzando il metodo di somiglianza, possiamo ricavare una soluzione particolare nella forma $y_p(x) = A\cos x + B\sin x$. Derivando ed inserendo nell'equazione completa si ottiene

$$-A\cos x - B\sin x - 2A\sin x + 2B\cos x - 8A\cos x - 8B\sin x = 85\sin x \qquad \Longrightarrow$$
$$\begin{cases} -A + 2B - 8A = 0 \\ -B - 2A - 8B = 85 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} B = 9A/2 \\ -85A/2 = 85 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} B = -9 \\ A = -2 \end{cases}$$

Quindi l'integrale generale dell'equazione completa sarà $y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-4x} - 2\cos x - 9\sin x$. Si vede subito che le soluzioni limitate a $+\infty$ sono tutte e solo quelle che si ottengono imponendo $C_1 = 0$.

Domanda 2
Consideriamo, ad esempio, la funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{y - 1}{\sqrt{x^2 + (y-1)^2}} & \text{se } (x, y) \neq (0, 1), \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 1). \end{cases}$$

Osserviamo che

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} f(0, y) = \lim_{y\to 1} \frac{y - 1}{|y - 1|} = \lim_{y\to 1^{\pm}} \operatorname{sign}(y - 1) = \pm 1 \neq f(0, 1)\,.$$

Pertanto, f non è continua nell'origine. Tuttavia, poiché $f(x, 1) \equiv 0$, essa è parzialmente derivabile rispetto ad x nel punto $(0, 1)$, in quanto costante lungo l'asse x. In particolare si ha $f_x(0, 1) = 0$.

TEMA B

Esercizio 1

Per determinare l'insieme di definizione, dobbiamo imporre le condizioni $x-2>0$, che fornisce $x>2$, $x\neq 0$ e $x^2-8x+15\neq 0$, che fornisce $x\neq 3$ e $x\neq 5$. Quindi $D=(2,3)\cup(3,5)\cup(5,+\infty)$. Calcoliamo, ora, i limiti alla frontiera:

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^4} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0 \quad \Longrightarrow \quad y=0 \text{ è asintoto orizzontale;}\\
&\lim_{x\to 5^\pm} f(x) = \lim_{x\to 5^\pm} \frac{4+\log^2 3}{50(x-5)} = \pm\infty \quad \Longrightarrow \quad x=5 \text{ è asintoto verticale;}\\
&\lim_{x\to 3^\pm} f(x) = \lim_{x\to 3^\pm} \frac{2(x-3)^2}{x^2(x-3)(x-5)} = 0 \quad \Longrightarrow \quad f \text{ è prolungabile con continuità in } x=3;\\
&\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \frac{\log^2(x-2)}{12} = +\infty \quad \Longrightarrow \quad x=0 \text{ è asintoto verticale.}
\end{aligned}$$

Notiamo che nel terzo limite abbiamo utilizzato il fatto che, per $x\to 3$, $\log^2(x-2)=\log^2[1+(x-3)]\sim(x-3)^2$.

Esercizio 2

Innanzitutto riscriviamo il numero complesso nella sua forma algebrica, moltiplicando e dividendo numeratore e denominatore per $2+i$. In tal modo otteniamo

$$\frac{-1+3i}{2-i}\,\frac{2+i}{2+i} = \frac{-5+5i}{5} = -1+i = \sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{i}{\sqrt{2}}\right).$$

Il numero ottenuto si può esprimere in forma esponenziale come $\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{i}{\sqrt{2}}\right)=\sqrt{2}\mathrm{e}^{3\pi i/4}$. Pertanto,

$$\sqrt[6]{\frac{-1+3i}{2-i}} = \sqrt[6]{\sqrt{2}\mathrm{e}^{3\pi i/4}} = \sqrt[12]{2}\cdot\begin{cases} \mathrm{e}^{3\pi i/24} = \mathrm{e}^{\pi i/8}\\ \mathrm{e}^{11\pi i/24}\\ \mathrm{e}^{19\pi i/24}\\ \mathrm{e}^{27\pi i/24} = \mathrm{e}^{9\pi i/8}\\ \mathrm{e}^{35\pi i/24}\\ \mathrm{e}^{43\pi i/24}. \end{cases}$$

Esercizio 3

Utilizzando il criterio della radice e tenendo conto della gerarchia degli infiniti, otteniamo

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{n^{2n}+4\log^2 n}{\mathrm{e}^{3n^2}}} &= \lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{n^{2n}\left(1+\frac{4\log^2 n}{n^{2n}}\right)}{\mathrm{e}^{3n^2}}}\\
&= \lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{n^{2n}}{\mathrm{e}^{3n^2}}} = \lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n^2}{\mathrm{e}^{3n}}\right)^n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{n^2}{\mathrm{e}^{3n}} = 0\,.
\end{aligned}$$

Pertanto, il criterio afferma che la serie proposta converge.

Domanda 1

Consideriamo, ad esempio, la funzione $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{|x-2|} & \text{per } x\geq 0,\\ \sqrt{2}-1+(x+1)^3 & \text{per } x<0. \end{cases}$$

Si verifica facilmente che f è continua su tutto $\mathbb{R}$. Osserviamo che

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{x-2}} & \text{per } x > 2, \\ -\dfrac{1}{2\sqrt{2-x}} & \text{per } 0 < x < 2, \\ 3(x+1)^2 & \text{per } x < 0. \end{cases}$$

Pertanto, $f' \geq 0$ in un intorno di $x = -1$ e

$$\lim_{x\to 2^\pm} f'(x) = \pm\infty \qquad \text{quindi } x = 2 \text{ è una cuspide;}$$

$$\lim_{x\to -1^\pm} f'(x) = f'(-1) = 0 \qquad \text{quindi } x = -1 \text{ è un punto di flesso a tangente orizzontale.}$$

Esercizio 4

Utilizzando lo sviluppo asintotico $\log(1 + 2(y-1)^2) \sim 2(y-1)^2$, per $y \to 1$, ed effettuando un cambiamento in coordinate polari centrate in $(0, 1)$, otteniamo

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{\log[1 + 2(y-1)^2]}{x^2 + y^2 - 2y + 1} = \lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{2(y-1)^2}{x^2 + (y-1)^2} = \lim_{\rho\to 0^+} \frac{2\rho^2 \sin^2\theta}{\rho^2} = \lim_{\rho\to 0^+} 2\sin^2\theta\,.$$

Poiché il limite dipende da θ, esso non esiste. Infatti, calcolandolo, ad esempio, lungo la retta $y = 1$ si ottiene $f(x, 1) \equiv 0 \to 0$ per $(x, y) \to (0, 1)$, mentre calcolandolo, ad esempio, lungo la retta $x = 0$ si ottiene $f(0, y) = \frac{\log(1+2(y-1)^2)}{(y-1)^2} \to 2$ per $(x, y) \to (0, 1)$.

Esercizio 5

Effettuando il cambiamento di variabile $t = \log x$, da cui $dt = \frac{1}{x}\, dx$, $t(1) = 0$, $t(\exp(\pi/2)) = \pi/2$, si ricava

$$\int_1^{\exp(\pi/2)} \frac{\log x}{x} \sin(\log x)\, dx = \int_0^{\pi/2} t \sin t\, dt = -t\cos t\Big|_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \cos t\, dt = 0 + \sin t\Big|_0^{\pi/2} = 1\,,$$

dove, nella seconda uguaglianza, abbiamo utilizzato un'integrazione per parti.

Esercizio 6

Osserviamo che l'equazione differenziale proposta è un'equazione lineare del secondo ordine a coefficienti costanti e non omogenea. L'equazione caratteristica ad essa associata è data da $\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0$, che ha come soluzioni $\lambda = 1$ e $\lambda = -3$. Pertanto, l'integrale generale dell'equazione omogenea associata sarà $y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-3x}$. Utilizzando il metodo di somiglianza, possiamo ricavare una soluzione particolare nella forma $y_p(x) = A\cos x + B\sin x$. Derivando ed inserendo nell'equazione completa si ottiene

$$-A\cos x - B\sin x - 2A\sin x + 2B\cos x - 3A\cos x - 3B\sin x = 20\cos x \qquad \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} -A + 2B - 3A = 20 \\ -B - 2A - 3B = 0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} 10B = 20 \\ A = -2B \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} B = 2 \\ A = -4 \end{cases}$$

Quindi l'integrale generale dell'equazione completa sarà $y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-3x} - 4\cos x + 2\sin x$. Si vede subito che le soluzioni limitate a $-\infty$ sono tutte e solo quelle che si ottengono imponendo $C_2 = 0$.

Domanda 2

Consideriamo, ad esempio, la funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{\sqrt{(x-1)^2 + y^2}} & \text{se } (x, y) \neq (1, 0), \\ 0 & \text{se } (x, y) = (1, 0). \end{cases}$$

Osserviamo che

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} f(x, 0) = \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{|x-1|} = \lim_{x\to 1^\pm} \operatorname{sign}(x-1) = \pm 1 \neq f(1, 0)\,.$$

Pertanto, f non è continua nell'origine. Tuttavia, poiché $f(1, y) \equiv 0$, essa è parzialmente derivabile rispetto ad y nel punto $(1, 0)$, in quanto costante lungo l'asse y. In particolare si ha $f_y(1, 0) = 0$.