SOLUZIONI COMPITO INTEGRATIVO

Esercizio 1

Osserviamo che, per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, l'integranda è una funzione continua e positiva in $(1, +\infty)$, e quindi integrabile in senso proprio in ogni intervallo chiuso e limitato della forma $[1+\delta, M]$, con $0 < \delta < M < +\infty$. Pertanto, per stabilire se l'integrale proposto esiste finito, esso va studiato in un intorno $U(+\infty)$ dell'infinito ed in un intorno destro $U(1^+)$ del punto $x = 1$.

In $U(+\infty)$, si ha

$$0 \leq f(x) \sim \frac{(\pi/2)^\alpha}{(x^2)^{3-2\alpha}} = \frac{(\pi/2)^\alpha}{x^{6-4\alpha}} \qquad \text{che è integrabile in senso improprio solo per } 6 - 4\alpha > 1,$$

quindi, per il criterio del confronto asintotico, l'integrale esiste finito se $\alpha < 5/4$, mentre diverge per $\alpha \geq 5/4$.

In $U(1^+)$, utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al primo ordine per la funzione $t \mapsto \arctan t$, con $t = x-1$, si ha

$$0 \leq f(x) \sim \frac{(x-1)^\alpha}{2^{3-2\alpha}} = \frac{1}{2^{3-2\alpha}(x-1)^{-\alpha}} \qquad \text{che è integrabile in senso improprio solo per } -\alpha < 1,$$

quindi, per il criterio del confronto asintotico, l'integrale esiste finito se $\alpha > -1$, mentre diverge per $\alpha \leq -1$. In conclusione, l'integrale proposto esiste finito solo per $-1 < \alpha < 5/4$.

Esercizio 2

Innanzitutto osserviamo che la funzione proposta, in quanto somma e rapporto di potenze con denominatore non nullo in D, è continua sull'insieme chiuso e limitato $\Gamma \subset D$. Pertanto, grazie al Teorema di Weierstrass, essa ammette almeno un punto di massimo ed un punto di minimo assoluti.

Poiché possiamo parametrizzare l'insieme Γ ponendo $y = 1/2x$, sostituendo nell'espressione di f, otteniamo

$$f\left(x, \frac{1}{2x}\right) = 4x^2 \frac{1}{4x^2} - 2x^2 - x \cdot 2x = 1 - 4x^2 =: g(x)\,.$$

La funzione g va ora studiata nell'intervallo $[1, 2]$; derivandola si ricava $g'(x) = -8x$, che è negativa per $x \in [1, 2]$. Quindi il punto $x = 2$ è punto di minimo assoluto, mentre il punto $x = 1$ è punto di massimo assoluto. Pertanto, per la funzione f, si ottiene che $(x, y) = (2, 1/4)$ è punto di minimo assoluto in Γ e $(x, y) = (1, 1/2)$ è punto di massimo assoluto in Γ.

Esercizio 3

Innanzitutto osserviamo che la funzione proposta, in quanto somma di potenze positive, è continua sull'insieme chiuso e limitato C. Pertanto, grazie al Teorema di Weierstrass, essa ammette almeno un punto di massimo ed un punto di minimo assoluti. Poiché l'insieme C può essere scritto sotto la forma di vincolo $C = \{g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0\}$, introduciamo la Lagrangiana $L(x, y, \lambda)$ associata al problema proposto e data da

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y) = 3x^3 + 2y^2 + 6x + \lambda(x^2 + y^2 - 1)\,.$$

Derivando, otteniamo

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 9x^2 + 6 + 2\lambda x = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 4y + 2\lambda y = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} 9x^2 + 6 + 2\lambda x = 0 \\ y(2 + \lambda) = 0 \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

che fornisce o $\lambda = -2$ oppure $y = 0$. Nel primo caso, sostituendo $\lambda = -2$ nella prima equazione, si ottiene un sistema impossibile; nel secondo caso, sostituendo $y = 0$ nella terza equazione, si ricava $x = \pm 1$. Quindi gli unici due punti stazionari sono $(\pm 1, 0)$. Confrontando i valori della funzione in $(1, 0)$ e $(-1, 0)$, si ottiene che $f(1, 0) = 9$ mentre $f(-1, 0) = -9$, quindi $(x, y) = (-1, 0)$ è punto di minimo assoluto in C e $(x, y) = (1, 0)$ è punto di massimo assoluto in C.