SOLUZIONI COMPITO del 16/01/2009
ANALISI 1 - MECCANICA + ELETTRICA 9 CFU
CALCOLO DIFF. e INT. I+II - MECCANICA 11 CFU

TEMA A

Esercizio 1

Chiaramente la serie proposta è una serie a termini positivi per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$. Osserviamo, inoltre, che, utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al primo ordine della funzione $\log(1+t)$ con $t = \mathrm{e}^{-3n}$, si ottiene:

$$a_n := \mathrm{e}^{3n} \frac{[\log(\mathrm{e}^{-3n}+1)]^{5\alpha^2}}{(\mathrm{e}^{3n}+1)^{1-4\alpha}} \sim \mathrm{e}^{3n} \frac{\mathrm{e}^{-3n5\alpha^2}}{\mathrm{e}^{3n(1-4\alpha)}} = \frac{1}{\mathrm{e}^{3n(5\alpha^2-4\alpha)}} \,.$$

Quindi il termine generale è infinitesimo se e solo se $5\alpha^2 - 4\alpha > 0$, ovvero $\alpha < 0$ o $\alpha > 4/5$, e, per tali valori del parametro, la serie proposta converge per il criterio della radice.

Esercizio 2

1. L'equazione differenziale proposta è un'equazione a variabili separabili che ha come soluzione singolare $y(x) \equiv 0$. Per determinare le altre soluzioni di tale equazione, procediamo per separazione di variabili, ottenendo
$$\int \frac{\mathrm{e}^y}{\mathrm{e}^y - 1}\, dy = \int \frac{1-2x}{1+x^2}\, dx \qquad \Longrightarrow \qquad \log|\mathrm{e}^{y(x)} - 1| = \arctan x - \log(1+x^2) + C$$
$$\Longrightarrow \qquad \mathrm{e}^{y(x)} = 1 + \tilde{C}\mathrm{e}^{\arctan x - \log(1+x^2)} \qquad \Longrightarrow \qquad y(x) = \log\left(1 + \tilde{C}\mathrm{e}^{\arctan x - \log(1+x^2)}\right) \quad \tilde{C} \in \mathbb{R} \,.$$
Osserviamo che per $\tilde{C} = 0$ si riottiene la soluzione singolare $y(x) \equiv 0$.
2. Imponendo la condizione iniziale, si ricava
$$1 = y_1(0) = \log\left(1 + \tilde{C}\right) \qquad \Longrightarrow \qquad \tilde{C} = \mathrm{e} - 1 \,.$$
Quindi la soluzione cercata è data da $y_1(x) = \log\left(1 + (\mathrm{e}-1)\mathrm{e}^{\arctan x - \log(1+x^2)}\right) = \log\left(1 + \frac{(\mathrm{e}-1)\mathrm{e}^{\arctan x}}{(1+x^2)}\right)$.
3. Infine otteniamo $\lim_{x\to+\infty} y_1(x) = \lim_{x\to+\infty} \log\left(1 + (\mathrm{e}-1)\mathrm{e}^{\arctan x - \log(1+x^2)}\right) = 0$.

Esercizio 3

Effettuando la sostituzione $t = \log x$, da cui $t(1) = 0$, $t(\mathrm{e}) = 1$, $dt = dx/x$, si ottiene

$$\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\mathrm{e}^{[\log^5 x + 4\log(\log x)]}}{x}\, dx = \int_0^1 \mathrm{e}^{t^5 + 4\log t}\, dt = \int_0^1 t^4 \mathrm{e}^{t^5}\, dt \,.$$

Effettuando ora la sostituzione $y = t^5$, da cui $y(0) = 0$, $y(1) = 1$, $dy/5 = t^4\, dt$, si ottiene

$$\int_0^1 t^4 \mathrm{e}^{t^5}\, dt = \frac{1}{5}\int_0^1 \mathrm{e}^y\, dy = \frac{1}{5}(\mathrm{e}-1) \,.$$

Esercizio 4

Utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al primo ordine per la funzione $x \mapsto \sin x$ e quello al secondo ordine per le funzioni $x \mapsto \cos x$, $x \mapsto \mathrm{e}^x$ e $t \mapsto \log(1+t)$, con $t = 2x$, otteniamo

$$f(x) \sim \frac{x^\alpha - x^2/2}{[2(1+x+x^2/2) - (2x - 2x^2) - 2]^{\alpha^2-1}} = \frac{x^\alpha - x^2/2}{(3x)^{2\alpha^2-2}} \,.$$

Pertanto, se $0 < \alpha < 2$, si ha

$$f(x) \sim \frac{x^\alpha}{(3x)^{2\alpha^2-2}} = \frac{x^{-2\alpha^2+\alpha+2}}{3^{2\alpha^2-2}}$$

e quindi la funzione avrà ordine di infinitesimo pari a 2 se e solo se $\alpha = 1/2$. Se, invece, $\alpha \geq 2$ si ha

$$f(x) \sim C\frac{x^2}{(3x)^{2\alpha^2-2}} = C\frac{x^{4-2\alpha^2}}{3^{2\alpha^2-2}} \,,$$

dove $C = 1/2$ se $\alpha = 2$ e $C = -1/2$ se $\alpha > 2$. Pertanto, in questo caso, la funzione non può mai essere un infinitesimo del secondo ordine per $x \to 0^+$, poiché le condizioni $\alpha = \pm 1$ non sono compatibili con la richiesta $\alpha \geq 2$.

Esercizio 5
Poiché $f'(x) < 0$ in $[1, +\infty)$, la funzione è strettamente decrescente e quindi invertibile. Poiché $f(1) = 1$ ed f è positiva e infinitesima per $x \to +\infty$, si ha che $Im(f) = (0, 1]$, ovvero, detta $g = f^{-1}$, si avrà necessariamente che $dom(g) = (0, 1]$, $g(1) = 1$ e g strettamente decrescente. Inoltre, poiché $f(x) \to 0^+$ se e solo se $x \to +\infty$, ponendo $y = f(x)$, si ottiene che, per $y \to 0^+$, $g(y) \to +\infty$. Dalla regolarità di f e dal fatto che $f' \neq 0$ si ottiene la regolarità di g e vale la formula $g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))}$. Infine, effettuando nuovamente il cambiamento di variabile $y = f(x)$, da cui $y(1) = 1$, $y(+\infty) = 0$, $dy = f'(x)\ dx$, ovvero $dx = dy/f'(g(y))$, si ottiene

$$\begin{aligned}\int_1^\infty f(x)\ dx &= \lim_{M \to +\infty} \int_1^M f(x)\ dx = \lim_{M \to +\infty} \int_1^{f(M)} \frac{y}{f'(g(y))}\ dy \\ &= -\lim_{\epsilon \to 0^+} \int_\epsilon^1 \frac{y}{f'(g(y))}\ dy = -\int_0^1 \frac{y}{f'(g(y))}\ dy\,.\end{aligned}$$

Pertanto i due integrali hanno lo stesso comportamento. Infine, ponendo ancora $y = f(x)$, da cui $x = g(y)$ e ricordando che $x \to +\infty$ se e solo se $y \to 0^+$, si ricava

$$y = f(x) \sim \frac{1}{x^\alpha} = \frac{1}{[g(y)]^\alpha} \qquad \Longleftrightarrow \qquad [g(y)]^\alpha \sim \frac{1}{y} \qquad \Longleftrightarrow \qquad g(y) \sim \frac{1}{y^{1/\alpha}}\,.$$

Esercizio 6 L'insieme di definizione di f, sarà determinato dalla condizione $5|x+y| - (x+y)^2 > 0$, che equivale a $y \neq -x$ e $|x + y| < 5$. Quindi si avrà

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ :\ -5 - x < y < -x\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ :\ -x < y < 5 - x\}\,.$$

TEMA B

Esercizio 1

Chiaramente la serie proposta è una serie a termini positivi per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$. Osserviamo, inoltre, che, utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al primo ordine delle funzioni $\sin t$ e $(1+t)^{1/2}$, con $t = \mathrm{e}^{-2n}$, si ottiene:

$$a_n := \frac{[\sin(\mathrm{e}^{-2n})]^{\alpha-1}}{\mathrm{e}^{2n}(\sqrt{1+\mathrm{e}^{-2n}}-1)^{\alpha^2}} \sim \frac{2^{\alpha^2}\mathrm{e}^{-2n(\alpha-1)}}{\mathrm{e}^{2n}\mathrm{e}^{-2n\alpha^2}} = \frac{2^{\alpha^2}}{\mathrm{e}^{2n(-\alpha^2+\alpha)}}\,.$$

Quindi il termine generale è infinitesimo se e solo se $-\alpha^2+\alpha > 0$, ovvero $0 < \alpha < 1$, e, per tali valori del parametro, la serie proposta converge per il criterio della radice.

Esercizio 2

1. L'equazione differenziale proposta è un'equazione a variabili separabili che ha come soluzione singolare $y(x) \equiv -1$. Per determinare le altre soluzioni di tale equazione, procediamo per separazione di variabili, ottenendo

$$\int \frac{y^2}{1+y^3}\,dy = \int \mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x-3)\,dx \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{1}{3}\log|y^3(x)+1| = \frac{(\mathrm{e}^x-3)^2}{2} + C$$
$$\Longrightarrow \qquad y^3(x) = \tilde{C}\mathrm{e}^{3(\mathrm{e}^x-3)^2/2} - 1 \qquad \Longrightarrow \qquad y(x) = \sqrt[3]{\tilde{C}\mathrm{e}^{3(\mathrm{e}^x-3)^2/2}-1} \quad \tilde{C} \in \mathbb{R}\,.$$

Osserviamo che per $\tilde{C} = 0$ si riottiene la soluzione singolare $y(x) \equiv -1$.

2. Imponendo la condizione iniziale, si ricava

$$-2 = y_1(\log 3) = \sqrt[3]{\tilde{C}-1} \qquad \Longrightarrow \qquad \tilde{C} = -7\,.$$

Quindi la soluzione cercata è data da $y_1(x) = \sqrt[3]{-7\mathrm{e}^{3(\mathrm{e}^x-3)^2/2}-1}$.

3. Infine otteniamo $\lim\limits_{x\to+\infty} y_1(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt[3]{-7\mathrm{e}^{3(\mathrm{e}^x-3)^2/2}-1} = -\infty\,.$

Esercizio 3

Osserviamo, innanzitutto, che l'integrale proposto si può riscrivere nella forma

$$\int_0^1 \frac{\log\left[(1+4x^4)^{x^3}\right]}{1+4x^4}\,dx = \int_0^1 x^3\frac{\log(1+4x^4)}{1+4x^4}\,dx\,.$$

Effettuando la sostituzione $t = \log(1+4x^4)$, da cui $t(0) = 0$, $t(1) = \log 5$, $dt = 16x^3\,dx/(1+4x^4)$, si ottiene

$$\int_0^1 x^3\frac{\log(1+4x^4)}{1+4x^4}\,dx = \frac{1}{16}\int_0^{\log 5} t\,dt = \frac{\log^2 5}{32}\,.$$

Esercizio 4

Utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al primo ordine per le funzioni $x \mapsto \tan x$ e $t \mapsto \log(1+t)$, con $t = x^2$, e quello al terzo ordine per le funzioni $x \mapsto \sin x$ e $x \mapsto \sinh x$, otteniamo

$$f(x) \sim \frac{(-x+x^3/3!+x+x^3/3!)^{1+\alpha^2/9}}{x^\alpha+x^2} = \frac{(x^3/3)^{1+\alpha^2/9}}{x^\alpha+x^2}\,.$$

Pertanto, se $0 < \alpha < 2$, si ha

$$f(x) \sim \frac{(x^3/3)^{1+\alpha^2/9}}{x^\alpha} = \frac{x^{\alpha^2/3-\alpha+3}}{3^{1+\alpha^2/9}}\,.$$

Quindi, in questo caso, la funzione non può mai essere un infinitesimo del terzo ordine per $x \to 0^+$, poiché le condizioni $\alpha = 0, 3$ non sono compatibili con la richiesta $0 < \alpha < 2$. Se, invece, $\alpha \geq 2$ si ha

$$f(x) \sim C\frac{(x^3/3)^{1+\alpha^2/9}}{x^2} = C\frac{x^{\alpha^2/3+1}}{3^{1+\alpha^2/9}}\,,$$

dove $C = 1/2$ se $\alpha = 2$ e $C = 1$ se $\alpha > 2$. Quindi la funzione avrà ordine di infinitesimo pari a 3 se e solo se $\alpha = \sqrt{6}$.

Esercizio 5

Poiché $f'(x) < 0$ in $(0, 1]$, la funzione è strettamente decrescente e quindi invertibile. Poiché $f(1) = 1$ ed f è positiva e infinita per $x \to 0^+$, si ha che $Im(f) = [1, +\infty)$, ovvero, detta $g = f^{-1}$, si avrà necessariamente che $dom(g) = [1, +\infty)$, $g(1) = 1$ e g strettamente decrescente. Inoltre, poiché $f(x) \to +\infty$ se e solo se $x \to 0^+$, ponendo $y = f(x)$, si ottiene che, per $y \to +\infty$, $g(y) \to 0^+$. Dalla regolarità di f e dal fatto che $f' \neq 0$ si ottiene la regolarità di g e vale la formula $g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))}$, ovvero $f'(x) = 1/g'(f(x))$. Infine, effettuando nuovamente il cambiamento di variabile $y = f(x)$, ovvero $x = g(y)$, da cui $y(0) = +\infty$, $y(1) = 1$, $dy = f'(x)\ dx$, ovvero $dx/g'(f(x)) = dy$, si ottiene

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{xf(x)}{g'(f(x))}\ dx &= \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_\epsilon^1 \frac{xf(x)}{g'(f(x))}\ dx = \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{f(\epsilon)}^1 g(y)y\ dy \\ &= -\lim_{M \to +\infty} \int_1^M g(y)y\ dy = -\int_1^{+\infty} g(y)y\ dy\,.\end{aligned}$$

Pertanto i due integrali hanno lo stesso comportamento. Infine, ponendo ancora $y = f(x)$, da cui $x = g(y)$ e ricordando che $x \to 0^+$ se e solo se $y \to +\infty$, si ricava

$$yg(y) = xf(x) \sim \frac{1}{x^\alpha} = \frac{1}{[g(y)]^{\alpha+1}} \qquad \Longleftrightarrow \qquad [g(y)]^{\alpha+1} \sim \frac{1}{y} \qquad \Longleftrightarrow \qquad g(y) \sim \frac{1}{y^{1/(\alpha+1)}}\,.$$

Esercizio 6 L'insieme di definizione di f, sarà determinato dalla condizione $-7|2x+y| + (2x+y)^2 > 0$, che equivale a $y \neq -2x$ e $|2x + y| > 7$. Quindi si avrà

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ :\ y < -7 - 2x\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ :\ y > 7 - 2x\}\,.$$

TEMA C

Esercizio 1

Chiaramente la serie proposta è una serie a termini positivi per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$. Osserviamo, inoltre, che, utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al primo ordine delle funzioni $\sin t$, con $t = \mathrm{e}^{-5n}$, e $(1+t)^{1/2}$, con $t = 3\mathrm{e}^{-5n}$, si ottiene:

$$a_n := \frac{(\mathrm{e}^{5n})^{-2-\alpha}(\sqrt{1+3\mathrm{e}^{-5n}}-1)^{\alpha^2-1}}{\sin(\mathrm{e}^{-5n})} \sim \frac{(\mathrm{e}^{5n})^{(-2-\alpha)}3^{(\alpha^2-1)}\mathrm{e}^{-5n(\alpha^2-1)}}{2^{(\alpha^2-1)}\mathrm{e}^{-5n}} = \left(\frac{3}{2}\right)^{\alpha^2-1}\frac{1}{(\mathrm{e}^{5n})^{(\alpha^2+\alpha)}}\,.$$

Quindi il termine generale è infinitesimo se e solo se $\alpha^2+\alpha>0$, ovvero $\alpha<-1$ o $\alpha>0$, e, per tali valori del parametro, la serie proposta converge per il criterio della radice.

Esercizio 2

1. L'equazione differenziale proposta è un'equazione a variabili separabili che ha come soluzione singolare $y(x) \equiv -\sqrt[5]{3}$. Per determinare le altre soluzioni di tale equazione, procediamo per separazione di variabili, ottenendo

$$\int \frac{y^4}{3+y^5}\,dy = 2\int \mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x-2)\,dx \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{1}{5}\log|y^5(x)+3| = (\mathrm{e}^x-2)^2+C$$
$$\Longrightarrow \qquad y^5(x) = \tilde{C}\mathrm{e}^{5(\mathrm{e}^x-2)^2}-3 \qquad \Longrightarrow \qquad y(x) = \sqrt[5]{\tilde{C}\mathrm{e}^{5(\mathrm{e}^x-2)^2}-3} \quad \tilde{C}\in\mathbb{R}\,.$$

Osserviamo che per $\tilde{C}=0$ si riottiene la soluzione singolare $y(x)\equiv -\sqrt[5]{3}$.

2. Imponendo la condizione iniziale, si ricava

$$-2 = y_1(\log 2) = \sqrt[5]{\tilde{C}-3} \qquad \Longrightarrow \qquad \tilde{C} = -29\,.$$

Quindi la soluzione cercata è data da $y_1(x) = \sqrt[5]{-29\mathrm{e}^{5(\mathrm{e}^x-2)^2}-3}$.

3. Infine otteniamo $\lim\limits_{x\to+\infty} y_1(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[5]{-29\mathrm{e}^{5(\mathrm{e}^x-2)^2}-3} = -\infty\,.$

Esercizio 3

Osserviamo, innanzitutto, che l'integrale proposto si può riscrivere nella forma

$$\int_0^2 \frac{\log[(1+x^3)^{2x^2}]}{1+x^3}\,dx = \int_0^2 2x^2\frac{\log(1+x^3)}{1+x^3}\,dx\,.$$

Effettuando la sostituzione $t=\log(1+x^3)$, da cui $t(0)=0$, $t(2)=\log 9$, $dt = 3x^2\,dx/(1+x^3)$, si ottiene

$$\int_0^2 2x^2\frac{\log(1+x^3)}{1+x^3}\,dx = \frac{2}{3}\int_0^{\log 9} t\,dt = \frac{\log^2 9}{3}\,.$$

Esercizio 4

Utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al primo ordine per le funzioni $x\mapsto \tan x$ e $t\mapsto\log(1+t)$, con $t=x^4$, e quello al terzo ordine per le funzioni $t\mapsto \sin t$, con $t=2x$, e $x\mapsto\sinh x$, otteniamo

$$f(x) \sim \frac{(-2x+8x^3/3!+2x+2x^3/3!)^{3\alpha^2+1}}{x+x^{4\alpha}} = \frac{(5x^3/3)^{3\alpha^2+1}}{x+x^{4\alpha}}\,.$$

Pertanto, se $0<\alpha<1/4$, si ha

$$f(x) \sim \frac{(5x^3/3)^{3\alpha^2+1}}{x^{4\alpha}} = \left(\frac{5}{3}\right)^{(3\alpha^2+1)} x^{9\alpha^2-4\alpha+3}\,.$$

Quindi, in questo caso, la funzione non può mai essere un infinitesimo del terzo ordine per $x\to 0^+$, poiché le condizioni $\alpha = 0, 4/9$ non sono compatibili con la richiesta $0<\alpha<1/4$. Se, invece, $\alpha\geq 1/4$ si ha

$$f(x) \sim C\frac{(5x^3/3)^{3\alpha^2+1}}{x} = C(5x^3/3)^{3\alpha^2+1}x^{9\alpha^2+2}\,,$$

dove $C=1/2$ se $\alpha=1/4$ e $C=1$ se $\alpha>1/4$. Quindi la funzione avrà ordine di infinitesimo pari a 3 se e solo se $\alpha = 1/3$.

Esercizio 5
Poiché $f'(x) < 0$ in $(0,1]$, la funzione è strettamente decrescente e quindi invertibile. Poiché $f(1) = 1$ ed f è positiva e infinita per $x \to 0^+$, si ha che $Im(f) = [1,+\infty)$, ovvero, detta $g = f^{-1}$, si avrà necessariamente che $dom(g) = [1,+\infty)$, $g(1) = 1$ e g strettamente decrescente. Inoltre, poiché $f(x) \to +\infty$ se e solo se $x \to 0^+$, ponendo $y = f(x)$, si ottiene che, per $y \to +\infty$, $g(y) \to 0^+$. Dalla regolarità di f e dal fatto che $f' \neq 0$ si ottiene la regolarità di g e vale la formula $g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))}$, ovvero $f'(x) = 1/g'(f(x))$. Infine, effettuando nuovamente il cambiamento di variabile $y = f(x)$, ovvero $x = g(y)$, da cui $y(0) = +\infty$, $y(1) = 1$, $dy = f'(x)\ dx$, ovvero $dx/g'(f(x)) = dy$, si ottiene

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{xf(x)}{g'(f(x))}\ dx &= \lim_{\epsilon\to 0^+}\int_\epsilon^1 \frac{xf(x)}{g'(f(x))}\ dx = \lim_{\epsilon\to 0^+}\int_{f(\epsilon)}^1 g(y)y\ dy \\ &= -\lim_{M\to+\infty}\int_1^M g(y)y\ dy = -\int_1^{+\infty} g(y)y\ dy\,.\end{aligned}$$

Pertanto i due integrali hanno lo stesso comportamento. Infine, ponendo ancora $y = f(x)$, da cui $x = g(y)$ e ricordando che $x \to 0^+$ se e solo se $y \to +\infty$, si ricava

$$yg(y) = xf(x) \sim \frac{1}{x^\alpha} = \frac{1}{[g(y)]^{\alpha+1}} \qquad \Longleftrightarrow \qquad [g(y)]^{\alpha+1} \sim \frac{1}{y} \qquad \Longleftrightarrow \qquad g(y) \sim \frac{1}{y^{1/(\alpha+1)}}\,.$$

Esercizio 6 L'insieme di definizione di f, sarà determinato dalla condizione $-7|2x+y|+(2x+y)^2 > 0$, che equivale a $y \neq -2x$ e $|2x+y| > 7$. Quindi si avrà

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ :\ y < -7-2x\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ :\ y > 7-2x\}\,.$$

TEMA D

Esercizio 1

Chiaramente la serie proposta è una serie a termini positivi per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$. Osserviamo, inoltre, che, utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al primo ordine della funzione $\log(1+t)$ con $t = \mathrm{e}^{-4n}$, si ottiene:

$$a_n := \frac{(\mathrm{e}^{4n}+2)^{2-3\alpha}}{(\mathrm{e}^{4n})^2\,[\log(\mathrm{e}^{-4n}+1)]^{\alpha^2}} \sim \frac{\mathrm{e}^{4n(2-3\alpha)}}{(\mathrm{e}^{4n})^2\,\mathrm{e}^{-4n\alpha^2}} = \frac{1}{\mathrm{e}^{4n(-\alpha^2+3\alpha)}}\,.$$

Quindi il termine generale è infinitesimo se e solo se $-\alpha^2+3\alpha>0$, ovvero $0<\alpha<3$, e, per tali valori del parametro, la serie proposta converge per il criterio della radice.

Esercizio 2

1. L'equazione differenziale proposta è un'equazione a variabili separabili che non ha alcuna soluzione singolare. Per determinare le soluzioni di tale equazione, procediamo per separazione di variabili, ottenendo

$$\int \frac{\mathrm{e}^{-y}}{1+\mathrm{e}^{-y}}\,dy = -\int \frac{x^3}{1+x^4}\,dx \qquad \Longrightarrow \qquad -\log|1+\mathrm{e}^{-y(x)}| = -\frac{1}{4}\log(1+x^4)+C$$
$$\Longrightarrow \qquad \mathrm{e}^{-y(x)} = \tilde{C}\sqrt[4]{1+x^4}-1 \qquad \Longrightarrow \qquad y(x) = -\log(\tilde{C}\sqrt[4]{1+x^4}-1) \quad \tilde{C}\in\mathbb{R}\,.$$

2. Imponendo la condizione iniziale, si ricava

$$0 = y_1(0) = -\log\left(\tilde{C}-1\right) \qquad \Longrightarrow \qquad \tilde{C}=2\,.$$

Quindi la soluzione cercata è data da $y_1(x) = -\log(2\sqrt[4]{1+x^4}-1) = \log\left(\frac{1}{2\sqrt[4]{1+x^4}-1}\right)$.

3. Infine otteniamo $\lim_{x\to-\infty}[-y_1(x)] = \lim_{x\to-\infty}\log(2\sqrt[4]{1+x^4}-1) = +\infty$.

Esercizio 3

Effettuando la sostituzione $t=\log x$, da cui $t(\mathrm{e})=1$, $t(\mathrm{e}^2)=2$, $dt = dx/x$, si ottiene

$$\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \frac{\mathrm{e}^{[3\log^2 x+\log(\log x)]}}{x}\,dx = \int_1^2 \mathrm{e}^{3t^2+\log t}\,dt = \int_1^2 t\mathrm{e}^{3t^2}\,dt\,.$$

Effettuando ora la sostituzione $y=3t^2$, da cui $y(1)=3$, $y(2)=12$, $dy/6 = t\,dt$, si ottiene

$$\int_1^2 t\mathrm{e}^{3t^2}\,dt = \frac{1}{6}\int_3^{12}\mathrm{e}^y\,dy = \frac{1}{6}(\mathrm{e}^{12}-\mathrm{e}^3)\,.$$

Esercizio 4

Utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al primo ordine per la funzione $x\mapsto \sin x$ e quello al secondo ordine per le funzioni $x\mapsto\cos x$, $x\mapsto \mathrm{e}^x$ e $x\mapsto\log(1+x)$, otteniamo

$$f(x)\sim\frac{x+(x^2/2)^{\alpha/2}}{|x-x^2/2+1-1-x-x^2/2|^{2\alpha^2-1}} = \frac{x+x^\alpha/(\sqrt{2})^\alpha}{x^{2(2\alpha^2-1)}}\,.$$

Pertanto, se $0<\alpha<1$, si ha

$$f(x)\sim\frac{x^\alpha/(\sqrt{2})^\alpha}{x^{2(2\alpha^2-1)}} = \frac{x^{-4\alpha^2+\alpha+2}}{(\sqrt{2})^\alpha}$$

e quindi la funzione avrà ordine di infinitesimo pari a 2 se e solo se $\alpha=1/4$. Se, invece, $\alpha\geq 1$ si ha

$$f(x)\sim C\frac{x}{x^{2(2\alpha^2-1)}} = Cx^{-4\alpha^2+3}\,,$$

dove $C = 1+1/\sqrt{2}$ se $\alpha=1$ e $C=1$ se $\alpha>1$. Pertanto, in questo caso, la funzione non può mai essere un infinitesimo del secondo ordine per $x\to0^+$, poiché le condizioni $\alpha=\pm1/2$ non sono compatibili con la richiesta $\alpha\geq1$.

Esercizio 5

Poiché $f'(x) < 0$ in $[1, +\infty)$, la funzione è strettamente decrescente e quindi invertibile. Poiché $f(1) = 1$ ed f è positiva e infinitesima per $x \to +\infty$, si ha che $Im(f) = (0, 1]$, ovvero, detta $g = f^{-1}$, si avrà necessariamente che $dom(g) = (0, 1]$, $g(1) = 1$ e g strettamente decrescente. Inoltre, poiché $f(x) \to 0^+$ se e solo se $x \to +\infty$, ponendo $y = f(x)$, si ottiene che, per $y \to 0^+$, $g(y) \to +\infty$. Dalla regolarità di f e dal fatto che $f' \neq 0$ si ottiene la regolarità di g e vale la formula $g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))}$. Infine, effettuando nuovamente il cambiamento di variabile $y = f(x)$, da cui $y(1) = 1$, $y(+\infty) = 0$, $dy = f'(x)\ dx$, ovvero $dx = dy/f'(g(y))$, si ottiene

$$\begin{aligned}\int_1^{\infty} f(x)\ dx &= \lim_{M\to+\infty}\int_1^{M} f(x)\ dx = \lim_{M\to+\infty}\int_1^{f(M)} \frac{y}{f'(g(y))}\ dy \\ &= -\lim_{\epsilon\to0^+}\int_\epsilon^{1} \frac{y}{f'(g(y))}\ dy = -\int_0^{1} \frac{y}{f'(g(y))}\ dy\,.\end{aligned}$$

Pertanto i due integrali hanno lo stesso comportamento. Infine, ponendo ancora $y = f(x)$, da cui $x = g(y)$ e ricordando che $x \to +\infty$ se e solo se $y \to 0^+$, si ricava

$$y = f(x) \sim \frac{1}{x^\alpha} = \frac{1}{[g(y)]^\alpha} \qquad \Longleftrightarrow \qquad [g(y)]^\alpha \sim \frac{1}{y} \qquad \Longleftrightarrow \qquad g(y) \sim \frac{1}{y^{1/\alpha}}\,.$$

Esercizio 6 L'insieme di definizione di f, sarà determinato dalla condizione $5|x+y| - (x+y)^2 > 0$, che equivale a $y \neq -x$ e $|x+y| < 5$. Quindi si avrà

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ :\ -5 - x < y < -x\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ :\ -x < y < 5 - x\}\,.$$