SOLUZIONI COMPITO A

Esercizio 1

$$F(x) = \begin{cases} \int_1^x \frac{\log t}{t\mathrm{e}^t}\, dt & \text{se } x > 0; \\ -x^2 & \text{se } -2 \le x \le 0; \\ x^2 - 8 & \text{se } x < -2; \end{cases}$$

$F(x) = 0 \quad x = -2\sqrt{2},\ 0,\ 1;$

$F(x) < 0 \quad -2\sqrt{2} < x < 0; \quad F(x) > 0 \quad x < -2\sqrt{2},\ 0 < x < 1,\ x > 1;$

$\displaystyle\lim_{x\to 0^+} F(x) = -\int_0^1 \frac{\log t}{t\mathrm{e}^t}\, dt = +\infty; \quad$ poiché $f(t) \sim \dfrac{1}{t(\log t)^{-1}}$

che non è impropriamente integrabile in un intorno di 0^+;

$x = 0$ è punto di infinito per F; $x = 0$ è asintoto verticale per $x \to 0^+$;

$\displaystyle\lim_{x\to +\infty} F(x) = \int_1^{+\infty} \frac{\log t}{t\mathrm{e}^t}\, dt = \alpha > 0; \quad$ poiché in un intorno di $+\infty$

$0 < \dfrac{\log t}{t\mathrm{e}^t} < \mathrm{e}^{-t}$ che è impropriamente integrabile; $y = \alpha$ è asintoto orizzontale a $+\infty$;

$\displaystyle\lim_{x\to -\infty} f(x) = +\infty; \quad$ non ci sono asintoti a $-\infty$;

$$F'(x) = \begin{cases} \frac{\log x}{x\mathrm{e}^x} & \text{se } x > 0; \\ -2x & \text{se } -2 < x < 0; \\ 2x & \text{se } x < -2; \end{cases}$$

$F'(x) > 0 \quad -2 < x < 0,\ x > 1; \quad F'(x) < 0 \quad x < -2,\ 0 < x < 1; \quad F'(x) = 0 \quad x = 1;$

$\displaystyle\lim_{x\to -2^\pm} F'(x) = \pm 4; \quad x = -2$ è punto angoloso; $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} F'(x) = 0;$

$$F''(x) = \begin{cases} \frac{1-(x+1)\log x}{x^2\mathrm{e}^x} & \text{se } x > 0; \\ -2 & \text{se } -2 < x < 0; \\ 2 & \text{se } x < -2; \end{cases}$$

$F''(x) < 0 \quad -2 < x < 0,\ x > \beta$ con $\beta > 1; \quad F''(x) > 0 \quad x < -2,\ 0 < x < \beta.$

Esercizio 2

Poiché la serie proposta è a termini positivi, utilizzando il criterio della radice si ottiene

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{4^n}{n^3(7^{\alpha+2})^n}} = \frac{4}{7^{\alpha+2}}\ .$$

Pertanto

$$\begin{aligned}
&\text{se } 4 < 7^{\alpha+2} \quad \text{ovvero} \quad \alpha > \frac{\log 4}{\log 7} - 2 \quad \text{la serie converge}\\
&\text{se } 4 > 7^{\alpha+2} \quad \text{ovvero} \quad \alpha < \frac{\log 4}{\log 7} - 2 \quad \text{la serie diverge}\\
&\text{se } 4 = 7^{\alpha+2} \quad \text{ovvero} \quad \alpha = \frac{\log 4}{\log 7} - 2 \quad \text{si ottiene } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3} \quad \text{che è convergente.}
\end{aligned}$$

Concludendo, la serie proposta converge per $\alpha \geq \frac{\log 4}{\log 7} - 2$.

Esercizio 3

Ricordando che $\operatorname{cotan} x = \frac{\cos x}{\sin x}$, l'integrale proposto diviene

$$\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\cos^2 x}{\operatorname{cotan} x}\, dx = \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\cos^2 x}{\cos x} \sin x \, dx = \int_{\pi/4}^{\pi/3} \sin x \cos x \, dx = \left.\frac{\sin^2 x}{2}\right|_{\pi/4}^{\pi/3} = 1/8 \ .$$

Esercizio 4

Utilizzando una nota disuguaglianza, si ottiene

$$0 \leq \frac{|x-1|^{3/2} y^2}{(x-1)^2 + y^4} \leq \frac{|x-1|^{3/2} y^2}{2|x-1| y^2} = \frac{1}{2}|x-1|^{1/2} \to 0 \qquad \text{per } (x,y) \to (1,0) \ .$$

Pertanto, per il teorema del confronto, il limite proposto è nullo.

SOLUZIONI COMPITO B

Esercizio 1

$$F(x) = \begin{cases} -\int_{-1}^{x} \frac{e^t \log|t|}{t}\, dt & \text{se } x < 0; \\ x^2 & \text{se } 0 \le x \le 3; \\ 18 - x^2 & \text{se } x > 3; \end{cases}$$

$F(x) = 0 \quad x = -1,\ 0,\ 3\sqrt{2};$

$F(x) > 0 \quad 0 < x < 3\sqrt{2}; \quad F(x) < 0 \quad x < -1,\ -1 < x < 0,\ x > 3\sqrt{2};$

$$\lim_{x\to 0^-} F(x) = -\int_{-1}^{0} \frac{e^t \log|t|}{t}\, dt = -\infty; \qquad \text{poiché } f(t) \sim -\frac{1}{t(\log|t|)^{-1}}$$

che non è impropriamente integrabile in un intorno di 0^-;

$x = 0$ è punto di infinito per F; $x = 0$ è asintoto verticale per $x \to 0^-$;

$$\lim_{x\to -\infty} F(x) = -\int_{-1}^{-\infty} \frac{e^t \log|t|}{t}\, dt = \alpha < 0; \quad \text{poiché in un intorno di } -\infty$$

$0 < \left|\frac{e^t \log|t|}{t}\right| < e^t$ che è impropriamente integrabile; $y = \alpha$ è asintoto orizzontale a $-\infty$;

$\lim_{x\to +\infty} F(x) = -\infty;$ non ci sono asintoti a $+\infty$;

$$F'(x) = \begin{cases} -\frac{e^x \log|x|}{x} & \text{se } x < 0; \\ 2x & \text{se } 0 < x < 3; \\ -2x & \text{se } x > 3; \end{cases}$$

$F'(x) > 0 \quad x < -1,\ 0 < x < 3; \quad F'(x) < 0 \quad -1 < x < 0,\ x > 3; \quad F'(x) = 0 \quad x = -1;$

$\lim_{x\to 3^\pm} F'(x) = \mp 6; \quad x = 3$ è punto angoloso; $\quad \lim_{x\to 0^+} F'(x) = 0;$

$$F''(x) = \begin{cases} \frac{e^x[(1-x)\log|x| - 1]}{x^2} & \text{se } x < 0; \\ 2 & \text{se } 0 < x < 3; \\ -2 & \text{se } x > 3; \end{cases}$$

$F''(x) > 0 \quad 0 < x < 3,\ x < \beta$ con $\beta < -1; \quad F''(x) < 0 \quad \beta < x < 0,\ x > 3.$

Esercizio 2

Poiché la serie proposta è a termini positivi, utilizzando il criterio della radice si ottiene

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{(4^{\alpha+2})^n}{2n^2 7^n}} = \frac{4^{\alpha+2}}{7}\ .$$

Pertanto

$$\text{se } 4^{\alpha+2} < 7 \quad \text{ovvero} \quad \alpha < \frac{\log 7}{\log 4} - 2 \quad \text{la serie converge}$$

$$\text{se } 4^{\alpha+2} > 7 \quad \text{ovvero} \quad \alpha > \frac{\log 7}{\log 4} - 2 \quad \text{la serie diverge}$$

$$\text{se } 4^{\alpha+2} = 7 \quad \text{ovvero} \quad \alpha = \frac{\log 7}{\log 4} - 2 \quad \text{si ottiene } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n^2} \quad \text{che è convergente.}$$

Concludendo, la serie proposta converge per $\alpha \leq \frac{\log 7}{\log 4} - 2$.

Esercizio 3

Ricordando che $\operatorname{cotan} x = \frac{\cos x}{\sin x}$, l'integrale proposto diviene

$$\int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{\cos^4 x}{\operatorname{cotan}^3 x}\, dx = \int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{\cos^4 x}{\cos^3 x} \sin^3 x\, dx = \int_{\pi/6}^{\pi/4} \sin^3 x \cos x\, dx = \left. \frac{\sin^4 x}{4} \right|_{\pi/6}^{\pi/4} = \frac{3}{64}\ .$$

Esercizio 4

Utilizzando una nota disuguaglianza, si ottiene

$$0 \leq \frac{|x|^{5/2}|y-1|}{x^4 + (y-1)^2} \leq \frac{|x|^{5/2}|y-1|}{2x^2|y-1|} = \frac{1}{2}|x|^{1/2} \to 0 \qquad \text{per } (x,y) \to (0,1)\ .$$

Pertanto, per il teorema del confronto, il limite proposto è nullo.

SOLUZIONI COMPITO C

Esercizio 1

$$F(x)=\begin{cases} \int_{-1}^{x} \frac{e^t \log|t|}{t}\, dt & \text{se } x<0; \\ -x^2 & \text{se } 0\le x\le 3; \\ -18+x^2 & \text{se } x>3; \end{cases}$$

$F(x)=0 \quad x=-1,\ 0,\ 3\sqrt{2}$;

$F(x)<0 \quad 0<x<3\sqrt{2}$; $\quad F(x)>0 \quad x<-1,\ -1<x<0,\ x>3\sqrt{2}$;

$\displaystyle\lim_{x\to 0^-} F(x)=\int_{-1}^{0} \frac{e^t \log|t|}{t}\, dt=+\infty;$ $\quad$ poiché $f(t)\sim \dfrac{1}{t(\log|t|)^{-1}}$

che non è impropriamente integrabile in un intorno di 0^-;

$x=0$ è punto di infinito per F; $x=0$ è asintoto verticale per $x\to 0^-$;

$\displaystyle\lim_{x\to -\infty} F(x)=\int_{-1}^{-\infty} \frac{e^t \log|t|}{t}\, dt=\alpha>0;$ $\quad$ poiché in un intorno di $-\infty$

$0<\left|\dfrac{e^t \log|t|}{t}\right|<e^t$ che è impropriamente integrabile; $\quad y=\alpha$ è asintoto orizzontale a $-\infty$;

$\displaystyle\lim_{x\to +\infty} F(x)=+\infty;$ $\quad$ non ci sono asintoti a $+\infty$;

$$F'(x)=\begin{cases} \frac{e^x \log|x|}{x} & \text{se } x<0; \\ -2x & \text{se } 0<x<3; \\ 2x & \text{se } x>3; \end{cases}$$

$F'(x)<0 \quad x<-1,\ 0<x<3$; $\quad F'(x)>0 \quad -1<x<0,\ x>3$; $\quad F'(x)=0 \quad x=-1$;

$\displaystyle\lim_{x\to 3^\pm} F'(x)=\pm 6;$ $\quad x=3$ è punto angoloso; $\quad \displaystyle\lim_{x\to 0^+} F'(x)=0;$

$$F''(x)=\begin{cases} -\frac{e^x[(1-x)\log|x|-1]}{x^2} & \text{se } x<0; \\ -2 & \text{se } 0<x<3; \\ 2 & \text{se } x>3; \end{cases}$$

$F''(x)<0 \quad 0<x<3,\ x<\beta$ con $\beta<-1$; $\quad F''(x)>0 \quad \beta<x<0,\ x>3$.

Esercizio 2

Poiché la serie proposta è a termini positivi, utilizzando il criterio della radice si ottiene

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{(6^{\alpha-1})^n}{n^2 3^n}}=\frac{6^{\alpha-1}}{3}\ .$$

Pertanto

$$\text{se } 6^{\alpha-1} < 3 \quad \text{ovvero} \quad \alpha < \frac{\log 3}{\log 6} + 1 \quad \text{la serie converge}$$

$$\text{se } 6^{\alpha-1} > 3 \quad \text{ovvero} \quad \alpha > \frac{\log 3}{\log 6} + 1 \quad \text{la serie diverge}$$

$$\text{se } 6^{\alpha-1} = 3 \quad \text{ovvero} \quad \alpha = \frac{\log 3}{\log 6} + 1 \quad \text{si ottiene } \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \quad \text{che è convergente.}$$

Concludendo, la serie proposta converge per $\alpha \leq \frac{\log 3}{\log 6} + 1$.

Esercizio 3

Ricordando che $\operatorname{cotan} x = \frac{\cos x}{\sin x}$, l'integrale proposto diviene

$$\int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{\operatorname{cotan}^4 x}{\cos^3 x}\, dx = \int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{\cos^4 x}{\sin^4 x \cos^3 x}\, dx = \int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{\cos x}{\sin^4 x}\, dx = -\frac{1}{3\sin^3 x}\bigg|_{\pi/6}^{\pi/4} = -\frac{4 - 8\sqrt{2}}{3\sqrt{2}} \ .$$

Esercizio 4

Utilizzando una nota disuguaglianza, si ottiene

$$0 \leq \frac{|x|^{7/2}|y-2|}{x^6 + (y-2)^2} \leq \frac{|x|^{7/2}|y-2|}{2|x|^3|y-2|} = \frac{1}{2}|x|^{1/2} \to 0 \qquad \text{per } (x,y) \to (0,2) \ .$$

Pertanto, per il teorema del confronto, il limite proposto è nullo.

SOLUZIONI COMPITO D

Esercizio 1

$$F(x) = \begin{cases} -\int_1^x \frac{\log t}{t\mathrm{e}^t}\, dt & \text{se } x > 0; \\ x^2 & \text{se } -2 \le x \le 0; \\ -x^2 + 8 & \text{se } x < -2; \end{cases}$$

$F(x) = 0 \quad x = -2\sqrt{2},\ 0,\ 1;$

$F(x) > 0 \quad -2\sqrt{2} < x < 0; \quad F(x) < 0 \quad x < -2\sqrt{2},\ 0 < x < 1,\ x > 1;$

$\lim_{x\to 0^+} F(x) = \int_0^1 \frac{\log t}{t\mathrm{e}^t}\, dt = -\infty; \quad$ poiché $f(t) \sim \frac{1}{t(\log t)^{-1}}$

che non è impropriamente integrabile in un intorno di 0^+;

$x = 0$ è punto di infinito per F; $x = 0$ è asintoto verticale per $x \to 0^+$;

$\lim_{x\to +\infty} F(x) = -\int_1^{+\infty} \frac{\log t}{t\mathrm{e}^t}\, dt = \alpha < 0; \quad$ poiché in un intorno di $+\infty$

$0 < \frac{\log t}{t\mathrm{e}^t} < \mathrm{e}^{-t}$ che è impropriamente integrabile; $y = \alpha$ è asintoto orizzontale a $+\infty$;

$\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty; \quad$ non ci sono asintoti a $-\infty$;

$$F'(x) = \begin{cases} -\frac{\log x}{x\mathrm{e}^x} & \text{se } x > 0; \\ 2x & \text{se } -2 < x < 0; \\ -2x & \text{se } x < -2; \end{cases}$$

$F'(x) < 0 \quad -2 < x < 0,\ x > 1; \quad F'(x) > 0 \quad x < -2,\ 0 < x < 1; \quad F'(x) = 0 \quad x = 1;$

$\lim_{x\to -2^\pm} F'(x) = \mp 4; \quad x = -2$ è punto angoloso; $\quad \lim_{x\to 0^-} F'(x) = 0;$

$$F''(x) = \begin{cases} -\frac{1-(x+1)\log x}{x^2\mathrm{e}^x} & \text{se } x > 0; \\ 2 & \text{se } -2 < x < 0; \\ -2 & \text{se } x < -2; \end{cases}$$

$F''(x) > 0 \quad -2 < x < 0,\ x > \beta$ con $\beta > 1; \quad F''(x) < 0 \quad x < -2,\ 0 < x < \beta.$

Esercizio 2

Poiché la serie proposta è a termini positivi, utilizzando il criterio della radice si ottiene

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{6^n}{3n^3(3^{\alpha-1})^n}} = \frac{6}{3^{\alpha-1}}\ .$$

Pertanto

$$\begin{aligned}
&\text{se } 6 < 3^{\alpha-1} \quad \text{ovvero} \quad \alpha > \frac{\log 6}{\log 3} + 1 \quad \text{la serie converge}\\
&\text{se } 6 > 3^{\alpha-1} \quad \text{ovvero} \quad \alpha < \frac{\log 6}{\log 3} + 1 \quad \text{la serie diverge}\\
&\text{se } 6 = 3^{\alpha-1} \quad \text{ovvero} \quad \alpha = \frac{\log 6}{\log 3} + 1 \quad \text{si ottiene} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3n^3} \quad \text{che è convergente.}
\end{aligned}$$

Concludendo, la serie proposta converge per $\alpha \geq \frac{\log 6}{\log 3} + 1$.

Esercizio 3

Ricordando che $\operatorname{cotan} x = \frac{\cos x}{\sin x}$, l'integrale proposto diviene

$$\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\operatorname{cotan}^2 x}{\cos x}\, dx = \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x \cos x}\, dx = \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\cos x}{\sin^2 x}\, dx = -\frac{1}{\sin x}\Big|_{\pi/4}^{\pi/3} = \frac{\sqrt{6}-2}{\sqrt{3}} \ .$$

Esercizio 4

Utilizzando una nota disuguaglianza, si ottiene

$$0 \leq \frac{|x-2|^{5/4}|y|^3}{(x-2)^2 + y^6} \leq \frac{|x-2|^{5/4}|y|^3}{2|x-2||y|^3} = \frac{1}{2}|x-2|^{1/4} \to 0 \qquad \text{per } (x,y) \to (2,0) \ .$$

Pertanto, per il teorema del confronto, il limite proposto è nullo.