SOLUZIONI COMPITO INTEGRATIVO

Esercizio 1

Il problema di Cauchy proposto è associato ad un'equazione differenziale lineare del secondo ordine a coefficienti costanti, la cui equazione caratteristica è $4\lambda^2 + 9 = 0$. Quest'ultima ha come soluzioni $\lambda = \pm 3i/2$, da cui si ottiene che la soluzione dell'equazione omogenea associata è

$$y_0(x) = C_1 \cos(3x/2) + C_2 \sin(3x/2)\,.$$

Dal metodo di somiglianza si ottiene, invece, che una soluzione particolare è della forma $y_p(x) = C\mathrm{e}^x$ e, sostituendo nell'equazione differenziale, si ricava $4C + 9C = 13$, da cui $C = 1$. Pertanto, la soluzione completa dell'equazione differenziale sarà

$$y(x) = y_0(x) + y_p(x) = C_1 \cos(3x/2) + C_2 \sin(3x/2) + \mathrm{e}^x\,.$$

Inserendo ora le condizioni iniziali si ricava $C_1 = -1$ e $C_2 = 0$, da cui

$$y(x) = -\cos(3x/2) + \mathrm{e}^x\,.$$

Esercizio 2

Ponendo $R = 1/l$, in senso generalizzato, si ricava

$$l = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{3^n}{\log n + 4^n}} = 3/4 \qquad \text{da cui} \qquad R = 4/3\,.$$

Poiché, per i risultati visti, la serie converge puntualmente in $(1 - 4/3, 1 + 4/3) = (-1/3, 7/3)$ e converge totalmente in ogni sottointervallo chiuso ivi contenuto, si ottiene che nell'intervallo $[0, 2]$ si ha convergenza totale.

Esercizio 3

I punti stazionari per f in $\mathbb{R}^2$ sono dati dalle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 3y - 10xy = 0\,, \\ f_y(x,y) = 3x + 12y - 5x^2 = 0\,, \end{cases} \qquad \text{da cui} \qquad \begin{array}{l} (x,y) = (0,0)\,, \\ (x,y) = (3/5,0)\,, \\ (x,y) = (3/10,-3/80)\,. \end{array}$$

Calcolando la matrice Hessiana in tali punti, si ricava

$$\begin{aligned} Hf(0,0) &= \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 12 \end{pmatrix} & &\text{punto di sella}\,, \\ Hf(3/5,0) &= \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 12 \end{pmatrix} & &\text{punto di sella}\,, \\ Hf(3/10,-3/80) &= \begin{pmatrix} 3/8 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix} & &\text{punto di minimo}\,. \end{aligned}$$

Esercizio 4

Osserviamo che f e g sono due iperboli equilatere che si intersecano nei punti ottenuti dalle soluzioni dell'equazione

$$\frac{1}{x} = \frac{5}{6} + \frac{1}{x-5} \qquad \text{che fornisce} \qquad x = 2\,,\ x = 3\,.$$

Pertanto l'area richiesta sarà data da

$$\int_2^3 \left(\frac{5}{6} + \frac{1}{x-5} - \frac{1}{x}\right)\, dx = \frac{5}{6} - 2\log(3/2)\,.$$