CALCOLO DIFF. e INT. I+II (h. 3) ☐ ANALISI I (h. 2.30) ☐ Appello del 17 febbraio 2009	**TEMA A** Cognome e nome (in stampatello) Corso di laurea: Meccanica ☐ Elettrica ☐

Barrare la casella corrispondente all'esame e al corso di laurea di competenza.
Gli studenti che sostengono l'esame di Analisi I NON devono svolgere l'esercizio n. 6.

1. Si consideri il numero complesso

$$z = \frac{i(1+\sqrt{2}) + (\sqrt{2}-1)}{2+i\sqrt{2}} .$$

1) Esprimerlo in forma trigonometrica.
2) Calcolare z^{14} ed esprimerlo in forma algebrica.

---

2. Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(x) + \lambda y'(x) = \mathrm{e}^{-2x} .$$

1. Determinare l'integrale generale, al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$.
2. Determinare, al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$, le soluzioni dell'equazione che sono infinitesime per $x \to +\infty$.

---

3. Stabilire per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ l'integrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{2\alpha+3/2}\sqrt{1+x^{2\alpha^2}}}{\sqrt{1+x^5}}\, dx$$

esiste finito.

---

4. Data la funzione

$$f(x) = x\mathrm{e}^{-1/|2x-1|-1/(2x-1)} - 3 ,$$

determinare l'insieme di definizione D e gli eventuali asintoti. Studiare, inoltre, se la funzione è prolungabile con continuità su tutto $\mathbb{R}$.

---

5. Siano $f, g : (0,1] \to \mathbb{R}$ due funzioni continue tali che, per $x \to 0^+$, si abbia

$$f(x) = x^2 + x^3 + o(x^3) \qquad \text{e} \qquad g(x) = x^3 + o(x^3) .$$

Stabilire, giustificando la risposta, quali delle seguenti affermazioni sono necessariamente vere e fornire un controesempio per quelle false:

1) $f(x^3) - g(x^2) \sim x^9$ per $x \to 0^+$;

2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) g\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ converge.

---

6. Stabilire la natura dei punti critici della funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = x^2y + 3xy^2 + 18x .$$

CALCOLO DIFF. e INT. I+II (h. 3) ☐ ANALISI I (h. 2.30) ☐ Appello del 17 febbraio 2009	**TEMA B** Cognome e nome (in stampatello) Corso di laurea: Meccanica ☐ Elettrica ☐

Barrare la casella corrispondente all'esame e al corso di laurea di competenza.
Gli studenti che sostengono l'esame di Analisi I NON devono svolgere l'esercizio n. 6.

1. Si consideri il numero complesso

$$z = \frac{i(\sqrt{2}-1)+(1+\sqrt{2})}{\sqrt{2}+2i}\,.$$

1) Esprimerlo in forma trigonometrica.
2) Calcolare z^{14} ed esprimerlo in forma algebrica.

---

2. Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(x) + 3\lambda y'(x) = \mathrm{e}^x\,.$$

1. Determinare l'integrale generale, al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$.
2. Determinare, al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$, le soluzioni dell'equazione che sono infinitesime per $x \to -\infty$.

---

3. Stabilire per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ l'integrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{1/2+\alpha}\sqrt{4+2x^2}}{\sqrt{3+x^{5+\alpha^2}}}\,dx$$

esiste finito.

---

4. Data la funzione

$$f(x) = (x+1/3)\mathrm{e}^{1/(3x+1)-1/|3x+1|}\,,$$

determinare l'insieme di definizione D e gli eventuali asintoti. Studiare, inoltre, se la funzione è prolungabile con continuità su tutto $\mathbb{R}$.

---

5. Siano $f, g : (0,1] \to \mathbb{R}$ due funzioni continue e strettamente positive tali che, per $x \to 0^+$, si abbia

$$f(x) = x^2 + x^4 + o(x^4) \qquad \text{e} \qquad g(x) = x^2 + o(x^2)\,.$$

Stabilire, giustificando la risposta, quali delle seguenti affermazioni sono necessariamente vere e fornire un controesempio per quelle false:

1) $\frac{f(x^2)-g(x^2)}{x^4} \to 0$ per $x \to 0^+$; 2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f\left(\frac{1}{\sqrt[4]{n}}\right) g\left(\frac{1}{\sqrt[4]{n}}\right)$ converge;

---

6. Stabilire la natura dei punti critici della funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = 18y - xy^2 - 3x^2y\,.$$

CALCOLO DIFF. e INT. I+II (h. 3) ☐ ANALISI I (h. 2.30) ☐ Appello del 17 febbraio 2009	**TEMA C** Cognome e nome (in stampatello) Corso di laurea: Meccanica ☐ Elettrica ☐

Barrare la casella corrispondente all'esame e al corso di laurea di competenza.
Gli studenti che sostengono l'esame di Analisi I NON devono svolgere l'esercizio n. 6.

1. Si consideri il numero complesso

$$z = \frac{(2/\sqrt{3}+2) + i(2-2/\sqrt{3})}{\sqrt{3}+3i} .$$

1) Esprimerlo in forma trigonometrica.
2) Calcolare $\left(\frac{3z}{2\sqrt{2}}\right)^8$ ed esprimerlo in forma algebrica.

---

2. Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(x) - 2\lambda y'(x) = \mathrm{e}^{3x} .$$

1. Determinare l'integrale generale, al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$.
2. Determinare, al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$, le soluzioni dell'equazione che sono infinitesime per $x \to -\infty$.

---

3. Stabilire per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ l'integrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{4+2x^{4+\alpha^2}}}{x^\alpha \sqrt{3+x^6}}\, dx$$

esiste finito.

---

4. Data la funzione

$$f(x) = 1 - x\mathrm{e}^{-1/|x|-1/x} ,$$

determinare l'insieme di definizione D e gli eventuali asintoti. Studiare, inoltre, se la funzione è prolungabile con continuità su tutto $\mathbb{R}$.

---

5. Siano $f, g : (0,1] \to \mathbb{R}$ due funzioni continue e strettamente positive tali che, per $x \to 0^+$, si abbia

$$f(x) = x^2 + x^4 + o(x^4) \qquad \text{e} \qquad g(x) = x^2 + o(x^2) .$$

Stabilire, giustificando la risposta, quali delle seguenti affermazioni sono necessariamente vere e fornire un controesempio per quelle false:

1) $\frac{f(x^2)-g(x^2)}{x^4} \to 0$ per $x \to 0^+$;

2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f\left(\frac{1}{\sqrt[4]{n}}\right) g\left(\frac{1}{\sqrt[4]{n}}\right)$ converge;

---

6. Stabilire la natura dei punti critici della funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = 18y - xy^2 - 3x^2 y .$$

CALCOLO DIFF. e INT. I+II (h. 3) ☐ ANALISI I (h. 2.30) ☐ Appello del 17 febbraio 2009	**TEMA D** Cognome e nome (in stampatello) Corso di laurea: Meccanica ☐ Elettrica ☐

Barrare la casella corrispondente all'esame e al corso di laurea di competenza.
Gli studenti che sostengono l'esame di Analisi I NON devono svolgere l'esercizio n. 6.

1. Si consideri il numero complesso

$$z = \frac{i(2/\sqrt{3}+2)+(2-2/\sqrt{3})}{3+i\sqrt{3}}\,.$$

1) Esprimerlo in forma trigonometrica.
2) Calcolare $\left(\frac{3z}{2\sqrt{2}}\right)^4$ ed esprimerlo in forma algebrica.

---

2. Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(x) - 4\lambda y'(x) = \mathrm{e}^{-2x}\,.$$

1. Determinare l'integrale generale, al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$.
2. Determinare, al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$, le soluzioni dell'equazione che sono infinitesime per $x \to +\infty$.

---

3. Stabilire per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ l'integrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{3+x^4}}{x^{3-\alpha}\sqrt{2+x^{5\alpha^2}}}\,dx$$

esiste finito.

---

4. Data la funzione

$$f(x) = x\mathrm{e}^{-1/|2x-4|+1/(2x-4)} + 2\,,$$

determinare l'insieme di definizione D e gli eventuali asintoti. Studiare, inoltre, se la funzione è prolungabile con continuità su tutto $\mathbb{R}$.

---

5. Siano $f, g : (0,1] \to \mathbb{R}$ due funzioni continue tali che, per $x \to 0^+$, si abbia

$$f(x) = x^2 + x^3 + o(x^3) \qquad \text{e} \qquad g(x) = x^3 + o(x^3)\,.$$

Stabilire, giustificando la risposta, quali delle seguenti affermazioni sono necessariamente vere e fornire un controesempio per quelle false:

1) $f(x^3) - g(x^2) \sim x^9$ per $x \to 0^+$;

2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) g\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ converge;

---

6. Stabilire la natura dei punti critici della funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = x^2y + 3xy^2 + 18x\,.$$