SOLUZIONI COMPITO del 17/02/2009
ELETTRICA 5 CFU

Esercizio 1
Osserviamo che, moltiplicando numeratore e denominatore per $(3-i\sqrt{3})$, il numero proposto si può riscrivere nella forma

$$\begin{aligned} z &= \frac{[i(2/\sqrt{3}+2)+(2-2/\sqrt{3})](3-i\sqrt{3})}{(3+i\sqrt{3})(3-i\sqrt{3})} \\ &= \frac{i(2\sqrt{3}+6)+6-2\sqrt{3}+2+2\sqrt{3}-i(2\sqrt{3}-2)}{12} = \frac{2}{3}+i\frac{2}{3} = \frac{2\sqrt{2}}{3}\,\mathrm{e}^{i\pi/4}\,. \end{aligned}$$

Pertanto, in forma trigonometrica $z = \frac{2\sqrt{2}}{3}[\cos(\pi/4)+i\sin(\pi/4)]$ ed inoltre $\left(\frac{3z}{2\sqrt{2}}\right)^4 = \mathrm{e}^{i4\pi/4} = \mathrm{e}^{i\pi} = -1$.

Esercizio 2
L'equazione differenziale proposta è un'equazione lineare del secondo ordine a coefficienti costanti e non omogenea. L'equazione caratteristica associata all'equazione differenziale è $\lambda^2-4\lambda=0$, che ha come soluzioni $\lambda = 0, 4$. Quindi l'integrale generale dell'equazione omogenea associata è dato da $y_0(x) = C_1 + C_2\mathrm{e}^{4x}$. Utilizzando il metodo di somiglianza, si ricava che la soluzione particolare è della forma $y_p(x) = A\mathrm{e}^{-2x}$ ove, sostituendo nell'equazione, si ottiene $4A+8A = 12$, cioè $A = 1$. La soluzione generale dell'equazione completa, pertanto, è data da $y(x) = C_1 + C_2\mathrm{e}^{4x} + \mathrm{e}^{-2x}$. Imponendo le condizioni iniziali, si perviene al sistema

$$\begin{cases} C_1+C_2+1=1\,, \\ 4C_2-2=-2\,, \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} C_1+C_2=0\,, \\ C_2=0\,, \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} C_1=0\,, \\ C_2=0\,. \end{cases}$$

Pertanto, la soluzione del problema di Cauchy è $y(x) = \mathrm{e}^{-2x}$.

Esercizio 3
Poiché f è continua nell'intervallo $[1,+\infty)$, per stabilire se essa è impropriamente integrabile nell'intervallo proposto, è sufficiente controllarne solo il suo comportamento all'infinito. Per $x \to +\infty$, si ottiene

$$f(x) = \frac{\sqrt{3+x^4}}{x^3\sqrt{2+x}} \sim \frac{x^2}{x^3x^{1/2}} = \frac{1}{x^{3/2}}\,.$$

Pertanto, l'integrale proposto converge per il criterio del confronto asintotico con un'iperbole di esponente maggiore di 1.

Esercizio 4
Osserviamo che la funzione proposta è ben definita in $D = (-\infty,0)\cup(0,+\infty)$. Osserviamo anche che la funzione può essere riscritta nella forma

$$f(x) = \begin{cases} 1-x\mathrm{e}^{-2/x} & \text{se } x>0, \\ 1-x & \text{se } x<0. \end{cases}$$

Calcolando i limiti alla frontiera dell'insieme di definizione, si ottiene

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \mp\infty \qquad \text{quindi non ci sono asintoti orizzontali;}$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\left[1-x\mathrm{e}^{-2/x}\right] = 1 \qquad \text{quindi non ci sono asintoti verticali;}$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}[1-x] = 1 \qquad \text{quindi non ci sono asintoti verticali.}$$

Ovviamente la funzione proposta è essa stessa una retta per $x<0$. Per determinare, invece, un eventuale asintoto obliquo a $+\infty$, procediamo come segue:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x}-\mathrm{e}^{-2/x}\right] = -1$$

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-x] = \lim_{x\to+\infty}\left[1-x\left(\mathrm{e}^{-2/x}-1\right)\right] = \lim_{x\to+\infty}\left[1+\frac{2x}{x}\right] = 3\,.$$

Quindi la retta $y(x) = -x+3$ è asintoto obliquo a $+\infty$.