CALCOLO DIFF. e INT./A appello del 18 gennaio 2008	cognome e nome firma

1. Stabilire il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} \left\{ 1 - \cos \left[\log \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \right] \right\} .$$

---

2. Si consideri l'equazione differenziale

$$y'(x) = \frac{y^2(x) - 1}{2} .$$

1. Determinare l'integrale generale.
2. Determinare, per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$, la soluzione della precedente equazione differenziale che soddisfi la condizione $y(0) = \lambda$.
3. Denotando con y_λ le soluzioni determinate nel punto precedente, calcolare $\lim_{x \to +\infty} y_\lambda(x)$, al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$.

---

3. Si consideri la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{e^{2(y-1)^3} - 1 + x^2 + (y-1)^2}{x^2 + y^2 + 1 - 2y} & \text{se } (x,y) \neq (0,1), \\ 1 & \text{se } (x,y) = (0,1). \end{cases}$$

1. Stabilire se f è continua in $\mathbb{R}^2$.
2. Calcolare $\nabla f(0,1)$.
3. Stabilire se f è differenziabile in $(0,1)$.

---

4. Determinare l'ordine di infinitesimo, per $x \to 0^+$, della funzione

$$f(x) = \cos\sqrt{x} - e^{-x/2} .$$

---

5. Stabilire, al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, se la funzione

$$f(x) = \frac{\sqrt[3]{1+x^2}}{x^\alpha \sqrt{2+x^3}} ,$$

è integrabile in senso improprio in $(0, +\infty)$.

---

6. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione convessa di classe $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$. Stabilire per ognuna delle seguenti affermazioni se è corretta o meno, giustificando la risposta o fornendo un controesempio:

a) f ha almeno un punto di minimo in $\mathbb{R}$;

b) se f ha un punto di minimo in $x = 0$ e in $x = 1 \Longrightarrow f$ è costante in $[0,1]$;

c) se $f''(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, f' si annulla al più una volta;

d) se $f'(0) = -1$ e $f'(1) = 1$, f ha un punto di minimo $x_m \in (0,1)$.

Tempo:
3 ore

CALCOLO DIFF. e INT./B appello del 18 gennaio 2008	cognome e nome firma

1. Stabilire il carattere della serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \sin^2\left(1-\cos\frac{1}{n}\right).$$

---

2. Si consideri l'equazione differenziale

$$y'(x) = \frac{(y(x)+2)(y(x)-3)}{5}.$$

1. Determinare l'integrale generale.
2. Determinare, per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$, la soluzione della precedente equazione differenziale che soddisfi la condizione $y(0) = \lambda$.
3. Denotando con y_λ le soluzioni determinate nel punto precedente, calcolare $\lim\limits_{x\to+\infty} y_\lambda(x)$, al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$.

---

3. Si consideri la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin\left[4(x-1)^3\right] + 2[(x-1)^2+(y-1)^2]}{x^2+y^2+2-2x-2y} & \text{se } (x,y) \neq (1,1), \\ 2 & \text{se } (x,y) = (1,1). \end{cases}$$

1. Stabilire se f è continua in $\mathbb{R}^2$.
2. Calcolare $\nabla f(1,1)$.
3. Stabilire se f è differenziabile in $(1,1)$.

---

4. Determinare l'ordine di infinitesimo, per $x \to 0^+$, della funzione

$$f(x) = \log(1+2x) - 2\sin x + 2x^2.$$

---

5. Stabilire, al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, se la funzione

$$f(x) = \frac{x^\alpha \sqrt[3]{2+x^3}}{\sqrt{2+x^4}},$$

è integrabile in senso improprio in $(0,+\infty)$.

---

6. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione concava di classe $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$. Stabilire per ognuna delle seguenti affermazioni se è corretta o meno, giustificando la risposta o fornendo un controesempio:

a) se $f''(x) < 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, f' si annulla al più una volta;
b) se f ha un punto di massimo in $x=-1$ e in $x=2 \Longrightarrow f$ è costante in $[-1,2]$;
c) f ha almeno un punto di massimo in $\mathbb{R}$;
d) se $f'(-1)=1$ e $f'(0)=-1$, f ha un punto di massimo $x_M \in (-1,0)$.

Tempo: 3 ore

CALCOLO DIFF. e INT./C appello del 18 gennaio 2008	cognome e nome firma

1. Stabilire il carattere della serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6 \sin^2\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)} .$$

---

2. Si consideri l'equazione differenziale
$$y'(x) = \frac{(y(x)+1)(y(x)-3)}{4} .$$

1. Determinare l'integrale generale.
2. Determinare, per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$, la soluzione della precedente equazione differenziale che soddisfi la condizione $y(0) = \lambda$.
3. Denotando con y_λ le soluzioni determinate nel punto precedente, calcolare $\lim_{x\to+\infty} y_\lambda(x)$, al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$.

---

3. Si consideri la funzione
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin\left[3(x-1)^3\right] + 2[(x-1)^2+y^2]}{x^2+y^2+1-2x} & \text{se } (x,y) \neq (1,0), \\ 2 & \text{se } (x,y) = (1,0). \end{cases}$$

1. Stabilire se f è continua in $\mathbb{R}^2$.
2. Calcolare $\nabla f(1,0)$.
3. Stabilire se f è differenziabile in $(1,0)$.

---

4. Determinare l'ordine di infinitesimo, per $x \to 0^+$, della funzione
$$f(x) = \sin(2x) - 2\log(1+x) - x^2 .$$

---

5. Stabilire, al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, se la funzione
$$f(x) = \frac{x^\alpha \sqrt{1+x}}{\sqrt[4]{2+x^5}} ,$$
è integrabile in senso improprio in $(0,+\infty)$.

---

6. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione concava di classe $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$. Stabilire per ognuna delle seguenti affermazioni se è corretta o meno, giustificando la risposta o fornendo un controesempio:

a) se f ha un punto di massimo in $x = -1$ e in $x = 2 \Longrightarrow f$ è costante in $[-1,2]$;
b) se $f''(x) < 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, f' si annulla al più una volta;
c) se $f'(-1) = 1$ e $f'(0) = -1$, f ha un punto di massimo $x_M \in (-1,0)$;
d) f ha almeno un punto di massimo in $\mathbb{R}$.

Tempo: 3 ore

CALCOLO DIFF. e INT./D appello del 18 gennaio 2008	cognome e nome firma

1. Stabilire il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}\left\{1-\cos\left[\exp\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)-1\right]\right\}}\,.$$

---

2. Si consideri l'equazione differenziale

$$y'(x) = \frac{(y(x)-1)(y(x)+2))}{3}\,.$$

1. Determinare l'integrale generale.
2. Determinare, per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$, la soluzione della precedente equazione differenziale che soddisfi la condizione $y(0) = \lambda$.
3. Denotando con y_λ le soluzioni determinate nel punto precedente, calcolare $\lim\limits_{x\to+\infty} y_\lambda(x)$, al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$.

---

3. Si consideri la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{e^{3(y+1)^3} - 1 + x^2 + (y+1)^2}{x^2+y^2+1+2y} & \text{se } (x,y) \neq (0,-1), \\ 1 & \text{se } (x,y) = (0,-1). \end{cases}$$

1. Stabilire se f è continua in $\mathbb{R}^2$.
2. Calcolare $\nabla f(0,-1)$.
3. Stabilire se f è differenziabile in $(0,-1)$.

---

4. Determinare l'ordine di infinitesimo, per $x \to 0^+$, della funzione

$$f(x) = e^{-x/4} - \cos\sqrt{\frac{x}{2}}\,.$$

---

5. Stabilire, al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, se la funzione

$$f(x) = \frac{\sqrt[4]{2+x}}{x^\alpha \sqrt[3]{3+x^4}}\,,$$

è integrabile in senso improprio in $(0,+\infty)$.

---

6. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione convessa di classe $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$. Stabilire per ognuna delle seguenti affermazioni se è corretta o meno, giustificando la risposta o fornendo un controesempio:

a) se $f'(0) = -1$ e $f'(1) = 1$, f ha un punto di minimo $x_m \in (0,1)$;
b) se $f''(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, f' si annulla al più una volta;
c) se f ha un punto di minimo in $x = 0$ e in $x = 1 \Longrightarrow f$ è costante in $[0,1]$;
d) f ha almeno un punto di minimo in $\mathbb{R}$.

Tempo: 3 ore