SOLUZIONI COMPITO A

Esercizio 1

Chiaramente la serie proposta è una serie a termini positivi. Osserviamo, inoltre, che, utilizzando la formula di Mc Laurin al secondo ordine per la funzione $t \mapsto \cos t$, con $t = \log(1 + 1/\sqrt{n})$, ed al primo ordine per la funzione $t \mapsto \log(1 + t)$, con $t = 1/\sqrt{n}$, si ottiene:

$$a_n := \sqrt{n}\left\{1 - \cos\left[\log\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right]\right\} \sim \sqrt{n}\,\frac{\left[\log\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right]^2}{2} \sim \sqrt{n}\,\frac{(1/\sqrt{n})^2}{2} = \frac{1}{2\sqrt{n}}\,.$$

Quindi, per il criterio del confronto asintotico con la serie armonica generalizzata di esponente minore di 1, la serie proposta diverge.

Esercizio 2

1. L'equazione differenziale proposta è un'equazione a variabili separabili che ha come soluzioni singolari $y(x) = 1$ e $y(x) = -1$. Per determinare le altre soluzioni di tale equazione, procediamo per separazione di variabili, ottenendo

$$\begin{aligned} &\int \frac{2}{y^2-1}\,dy = \int dx \qquad &&\Longrightarrow \qquad \int \frac{1}{y-1}\,dy - \int \frac{1}{y+1}\,dy = x + C \\ \Longrightarrow \qquad &\log\left|\frac{y-1}{y+1}\right| = x + C \qquad &&\Longrightarrow \qquad \frac{y-1}{y+1} = \tilde{C}e^x \qquad \tilde{C} \in \mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

Pertanto l'integrale generale sarà dato da $y(x) = \frac{1+\tilde{C}e^x}{1-\tilde{C}e^x}$. Osserviamo che per $\tilde{C} = 0$ si riottiene la soluzione singolare $y(x) = 1$, mentre per nessun valore di $\tilde{C}$ si recupera la soluzione singolare $y(x) = -1$.

2. Imponendo la condizione iniziale, si ricava

$$\lambda = y(0) = \frac{1+\tilde{C}}{1-\tilde{C}} \qquad \Longrightarrow \qquad \tilde{C} = \frac{\lambda-1}{\lambda+1}.$$

Quindi, per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$, otteniamo che la soluzione cercata è data da

$$y_\lambda(x) = \frac{\lambda + 1 + (\lambda-1)e^x}{\lambda + 1 - (\lambda-1)e^x}\,.$$

Osserviamo che per $\lambda = 1$ si riottiene la soluzione singolare $y(x) = 1$, mentre per $\lambda = -1$ si recupera la soluzione singolare $y(x) = -1$.

3. Infine otteniamo

$$\lim_{x\to+\infty} y_\lambda(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\lambda + 1 + (\lambda-1)e^x}{\lambda + 1 - (\lambda-1)e^x} = \begin{cases} -1 & \text{se } \lambda \neq 1, \\ 1 & \text{se } \lambda = 1. \end{cases}$$

Esercizio 3

1. La funzione considerata è chiaramente continua in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,1)\}$, in quanto è composizione, somma e rapporto di funzioni continue, con il denominatore mai nullo. Per studiarne la continuità nel punto $(0,1)$, procediamo attraverso la definizione. Utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al primo ordine per la funzione $t \mapsto e^t$, con $t = 2x^3$ e passando alle coordinate polari centrate in $(0,1)$, otteniamo

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{2(y-1)^3}{x^2+(y-1)^2} + 1 = \lim_{\rho\to0^+} \frac{2\rho^3\sin^3\theta}{\rho^2} + 1 = \lim_{\rho\to0^+} 2\rho\sin^3\theta + 1 = 1$$

indipendentemente da θ. Poiché $f(0,1) = 1$, la funzione f risulta continua anche in $(0,1)$ e quindi $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^2)$.

2. Derivate parziali:
$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,1) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left(\frac{1-1+t^2}{t^2} - 1\right) = 0 \;;$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,1) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left(\frac{\mathrm{e}^{2t^3}-1+t^2}{t^2} - 1\right) = \lim_{t\to 0}\frac{\mathrm{e}^{2t^3}-1}{t^3} = 2\;.$$
Quindi si ha $\nabla f(0,-1) = (0,2)$.
3. Per quanto riguarda la differenziabilità, facendo prima uno sviluppo di Taylor al secondo ordine per la funzione $t \mapsto \mathrm{e}^t$, con $t = 2k^3$ e poi passando in coordinate polari, centrate nell'origine, si ottiene
$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}}\left(\frac{\mathrm{e}^{2k^3}-1}{h^2+k^2} - 2k\right) = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{2k^3 + \frac{1}{2}4k^6 - 2h^2k - 2k^3}{(h^2+k^2)^{3/2}}$$
$$= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{2k^6 - 2h^2k}{(h^2+k^2)^{3/2}} = \lim_{\rho\to 0^+} \frac{-2\rho^3\cos^2\theta\sin\theta + 2\rho^6\sin^6\theta}{\rho^3} \neq 0\;,$$
quindi f non è differenziabile in $(0,1)$.

Esercizio 4

Utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al quarto ordine per la funzione $t \mapsto \cos t$, con $t = \sqrt{x}$, e lo sviluppo al secondo ordine per la funzione $t \mapsto \mathrm{e}^t$, con $t = -x/2$, otteniamo
$$\cos\sqrt{x} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{24} + o(x^2\sqrt{x})$$
$$\mathrm{e}^{-x/2} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} + o(x^2)$$
da cui
$$f(x) = \cos\sqrt{x} - \mathrm{e}^{-x/2} = \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{24} + o(x^2\sqrt{x})\right) - \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} + o(x^2)\right) = -\frac{x^2}{12} + o(x^2)\,.$$
Quindi la funzione assegnata è un infinitesimo del secondo ordine per $x \to 0^+$.

Esercizio 5

La funzione integranda è continua su tutto l'intervallo $(0,+\infty)$, per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$; pertanto, per stabilire il comportamento dell'integrale proposto dobbiamo studiare l'integranda in un intorno destro di 0 ed in un intorno di $+\infty$. In $U(0^+)$ otteniamo
$$f(x) = \frac{\sqrt[3]{1+x^2}}{x^\alpha\sqrt{2+x^3}} \sim \frac{1}{x^\alpha} \qquad \text{che è integrabile se e solo se } \alpha < 1.$$
In $U(+\infty)$ otteniamo
$$f(x) = \frac{\sqrt[3]{1+x^2}}{x^\alpha\sqrt{2+x^3}} \sim \frac{x^{2/3}}{x^\alpha x^{3/2}} = \frac{1}{x^{\alpha+5/6}} \qquad \text{che è integrabile se e solo se } \alpha + 5/6 > 1, \text{ ovvero per } \alpha > 1/6.$$
Concludendo, l'integrale improprio proposto esiste finito se e solo se $1/6 < \alpha < 1$.

Esercizio 6

a) L'affermazione è errata, basta prendere $f(x) = \mathrm{e}^x$, che è convessa ($f''(x) = \mathrm{e}^x > 0$) e sempre strettamente crescente.
b) L'affermazione è corretta, infatti $f'(0) = f'(1) = 0$ e, come conseguenza della convessità, f' è crescente. Quindi $f'(x) = 0$ per ogni $x \in [0,1]$, ovvero f è costante in $[0,1]$.
c) L'affermazione è corretta, infatti se $f''(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, si ha che f' è una funzione strettamente crescente e quindi può attraversare l'asse x al più una volta.
d) L'affermazione è corretta, infatti se $f'(0) < 0$ ed $f'(1) > 0$, per il teorema degli zeri deve esistere un punto $x_m \in (0,1)$ in cui $f'(x_m) = 0$. Essendo f convessa, il punto stazionario x_m è un minimo.

SOLUZIONI COMPITO B

Esercizio 1

Chiaramente la serie proposta è una serie a termini positivi. Osserviamo, inoltre, che, utilizzando la formula di Mc Laurin al primo ordine per la funzione $t \mapsto \sin t$, con $t = 1 - \cos(1/n)$, ed al secondo ordine per la funzione $t \mapsto \cos t$, con $t = 1/n$, si ottiene:

$$a_n := n^2 \sin^2\left(1 - \cos\frac{1}{n}\right) \sim n^2 \left(1 - \cos\frac{1}{n}\right)^2 \sim n^2\,\frac{1}{4n^4} = \frac{1}{4n^2}\,.$$

Quindi, per il criterio del confronto asintotico con la serie armonica generalizzata di esponente maggiore di 1, la serie proposta converge.

Esercizio 2

1. L'equazione differenziale proposta è un'equazione a variabili separabili che ha come soluzioni singolari $y(x) = 3$ e $y(x) = -2$. Per determinare le altre soluzioni di tale equazione, procediamo per separazione di variabili, ottenendo

$$\begin{aligned} &\int \frac{5}{(y+2)(y-3)}\,dy = \int dx && \Longrightarrow && \int \frac{1}{y-3}\,dy - \int \frac{1}{y+2}\,dy = x + C \\ \Longrightarrow\quad &\log\left|\frac{y-3}{y+2}\right| = x + C && \Longrightarrow && \frac{y-3}{y+2} = \tilde{C}\mathrm{e}^x \qquad \tilde{C} \in \mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

   Pertanto l'integrale generale sarà dato da $y(x) = \frac{3+2\tilde{C}\mathrm{e}^x}{1-\tilde{C}\mathrm{e}^x}$. Osserviamo che per $\tilde{C} = 0$ si riottiene la soluzione singolare $y(x) = 3$, mentre per nessun valore di $\tilde{C}$ si recupera la soluzione singolare $y(x) = -2$.

2. Imponendo la condizione iniziale, si ricava

$$\lambda = y(0) = \frac{3 + 2\tilde{C}}{1 - \tilde{C}} \qquad \Longrightarrow \qquad \tilde{C} = \frac{\lambda - 3}{\lambda + 2}.$$

   Quindi, per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$, otteniamo che la soluzione cercata è data da

$$y_\lambda(x) = \frac{3(\lambda+2) + 2(\lambda-3)\mathrm{e}^x}{\lambda + 2 - (\lambda-3)\mathrm{e}^x}\,.$$

   Osserviamo che per $\lambda = 3$ si riottiene la soluzione singolare $y(x) = 3$, mentre per $\lambda = -2$ si recupera la soluzione singolare $y(x) = -2$.

3. Infine otteniamo

$$\lim_{x\to+\infty} y_\lambda(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{3(\lambda+2) + 2(\lambda-3)\mathrm{e}^x}{\lambda + 2 - (\lambda-3)\mathrm{e}^x} = \begin{cases} -2 & \text{se } \lambda \neq 3, \\ 3 & \text{se } \lambda = 3. \end{cases}$$

Esercizio 3

1. La funzione considerata è chiaramente continua in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(1,1)\}$, in quanto è composizione, somma e rapporto di funzioni continue, con il denominatore mai nullo. Per studiarne la continuità nel punto $(1,1)$, procediamo attraverso la definizione. Utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al primo ordine per la funzione $t \mapsto \sin t$, con $t = 4(x-1)^3$ e passando alle coordinate polari centrate in $(1,1)$, otteniamo

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{4(x-1)^3}{(x-1)^2 + (y-1)^2} + 2 = \lim_{\rho\to0^+} \frac{4\rho^3\cos^3\theta}{\rho^2} + 2 = \lim_{\rho\to0^+} 4\rho\cos^3\theta + 2 = 2$$

   indipendentemente da θ. Poiché $f(1,1) = 2$, la funzione f risulta continua anche in $(1,1)$ e quindi $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^2)$.

2. Derivate parziali:
$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left(\frac{\sin 4t^3 + 2t^2}{t^2} - 2\right) = \lim_{t\to 0} \frac{\sin 4t^3}{t^3} = 4 \ ;$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left(\frac{0 + 2t^2}{t^2} - 2\right) = 0 \ .$$
Quindi si ha $\nabla f(1,1) = (4,0)$.
3. Per quanto riguarda la differenziabilità, facendo prima uno sviluppo di Taylor al terzo ordine per la funzione $t \mapsto \sin t$, con $t = 4h^3$ e poi passando in coordinate polari, centrate nell'origine, si ottiene
$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}}\left(\frac{\sin(4h^3)}{h^2+k^2} - 4h\right) = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{4h^3 + \frac{1}{3!}64h^9 - 4h^3 - 4hk^2}{(h^2+k^2)^{3/2}}$$
$$= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\frac{32}{3}h^9 - 4hk^2}{(h^2+k^2)^{3/2}} = \lim_{\rho\to 0^+} \frac{-4\rho^3\cos\theta\sin^2\theta + \frac{32}{3}\rho^9\cos^9\theta}{\rho^3} \neq 0 \ ,$$
quindi f non è differenziabile in $(1,1)$.

Esercizio 4

Utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al terzo ordine per la funzione $t \mapsto \log(1+t)$, con $t = 2x$, e lo sviluppo al terzo ordine per la funzione $t \mapsto \sin x$, otteniamo
$$\log(1+2x) = 2x - \frac{4x^2}{2} + \frac{8x^3}{3} + o(x^3)$$
$$2\sin x = 2x - \frac{2x^3}{6} + o(x^4)$$
da cui
$$f(x) = \log(1+2x) - 2\sin x + 2x^2 = \left(2x - \frac{4x^2}{2} + \frac{8x^3}{3} + o(x^3)\right) - \left(2x - \frac{2x^3}{6} + o(x^4)\right) + 2x^2 = 3x^3 + o(x^3) \ .$$
Quindi la funzione assegnata è un infinitesimo del terzo ordine per $x \to 0^+$.

Esercizio 5

La funzione integranda è continua su tutto l'intervallo $(0,+\infty)$, per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$; pertanto, per stabilire il comportamento dell'integrale proposto dobbiamo studiare l'integranda in un intorno destro di 0 ed in un intorno di $+\infty$. In $U(0^+)$ otteniamo
$$f(x) = \frac{x^\alpha \sqrt[3]{2+x^3}}{\sqrt{2+x^4}} \sim \frac{\sqrt[3]{2}\, x^\alpha}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{2}} \frac{1}{x^{-\alpha}} \qquad \text{che è integrabile se e solo se } -\alpha < 1, \text{ ovvero per } \alpha > -1.$$
In $U(+\infty)$ otteniamo
$$f(x) = \frac{x^\alpha \sqrt[3]{2+x^3}}{\sqrt{2+x^4}} \sim \frac{x^\alpha x}{x^2} = \frac{1}{x^{1-\alpha}} \qquad \text{che è integrabile se e solo se } 1-\alpha > 1, \text{ ovvero per } \alpha < 0.$$
Concludendo, l'integrale improprio proposto esiste finito se e solo se $-1 < \alpha < 0$.

Esercizio 6

a) L'affermazione è corretta, infatti se $f''(x) < 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, si ha che f' è una funzione strettamente decrescente e quindi può attraversare l'asse x al più una volta.
b) L'affermazione è corretta, infatti $f'(-1) = f'(2) = 0$ e, come conseguenza della concavità, f' è decrescente. Quindi $f'(x) = 0$ per ogni $x \in [-1,2]$, ovvero f è costante in $[-1,2]$.
c) L'affermazione è errata, basta prendere $f(x) = -e^x$, che è concava ($f''(x) = -e^x < 0$) e sempre strettamente decrescente.
d) L'affermazione è corretta, infatti se $f'(-1) > 0$ ed $f'(0) < 0$, per il teorema degli zeri deve esistere un punto $x_M \in (-1,0)$ in cui $f'(x_M) = 0$. Essendo f concava, il punto stazionario x_M è un massimo.

SOLUZIONI COMPITO C

Esercizio 1

Chiaramente la serie proposta è una serie a termini positivi. Osserviamo, inoltre, che, utilizzando la formula di Mc Laurin al primo ordine per la funzione $t \mapsto \sin t$, con $t = 1 - \cos(1/n)$, ed al secondo ordine per la funzione $t \mapsto \cos t$, con $t = 1/n$, si ottiene:

$$a_n := \frac{1}{n^6 \sin^2\left(1 - \cos\frac{1}{n}\right)} \sim \frac{1}{n^6\left(1 - \cos\frac{1}{n}\right)^2} \sim \frac{1}{n^6 \frac{1}{4n^4}} = \frac{4}{n^2}\,.$$

Quindi, per il criterio del confronto asintotico con la serie armonica generalizzata di esponente maggiore di 1, la serie proposta converge.

Esercizio 2

1. L'equazione differenziale proposta è un'equazione a variabili separabili che ha come soluzioni singolari $y(x) = 3$ e $y(x) = -1$. Per determinare le altre soluzioni di tale equazione, procediamo per separazione di variabili, ottenendo

$$\int \frac{4}{(y+1)(y-3)}\,dy = \int dx \quad \Longrightarrow \quad \int \frac{1}{y-3}\,dy - \int \frac{1}{y+1}\,dy = x + C$$
$$\Longrightarrow \quad \log\left|\frac{y-3}{y+1}\right| = x + C \quad \Longrightarrow \quad \frac{y-3}{y+1} = \tilde{C}\mathrm{e}^x \qquad \tilde{C} \in \mathbb{R}\,.$$

Pertanto l'integrale generale sarà dato da $y(x) = \frac{3+\tilde{C}\mathrm{e}^x}{1-\tilde{C}\mathrm{e}^x}$. Osserviamo che per $\tilde{C} = 0$ si riottiene la soluzione singolare $y(x) = 3$, mentre per nessun valore di $\tilde{C}$ si recupera la soluzione singolare $y(x) = -1$.

2. Imponendo la condizione iniziale, si ricava

$$\lambda = y(0) = \frac{3+\tilde{C}}{1-\tilde{C}} \qquad \Longrightarrow \qquad \tilde{C} = \frac{\lambda - 3}{\lambda + 1}.$$

Quindi, per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$, otteniamo che la soluzione cercata è data da

$$y_\lambda(x) = \frac{3(\lambda+1) + (\lambda-3)\mathrm{e}^x}{\lambda + 1 - (\lambda-3)\mathrm{e}^x}\,.$$

Osserviamo che per $\lambda = 3$ si riottiene la soluzione singolare $y(x) = 3$, mentre per $\lambda = -1$ si recupera la soluzione singolare $y(x) = -1$.

3. Infine otteniamo

$$\lim_{x\to+\infty} y_\lambda(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{3(\lambda+1) + (\lambda-3)\mathrm{e}^x}{\lambda + 1 - (\lambda-3)\mathrm{e}^x} = \begin{cases} -1 & \text{se } \lambda \neq 3, \\ 3 & \text{se } \lambda = 3. \end{cases}$$

Esercizio 3

1. La funzione considerata è chiaramente continua in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(1,0)\}$, in quanto è composizione, somma e rapporto di funzioni continue, con il denominatore mai nullo. Per studiarne la continuità nel punto $(1,0)$, procediamo attraverso la definizione. Utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al primo ordine per la funzione $t \mapsto \sin t$, con $t = 3(x-1)^3$ e passando alle coordinate polari centrate in $(1,0)$, otteniamo

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{3(x-1)^3}{(x-1)^2 + y^2} + 2 = \lim_{\rho\to 0^+} \frac{3\rho^3\cos^3\theta}{\rho^2} + 2 = \lim_{\rho\to 0^+} 3\rho\cos^3\theta + 2 = 2$$

indipendentemente da θ. Poiché $f(1,0) = 2$, la funzione f risulta continua anche in $(1,0)$ e quindi $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^2)$.

2. Derivate parziali:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,0) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left(\frac{\sin 3t^3 + 2t^2}{t^2} - 2\right) = \lim_{t\to 0} \frac{\sin 3t^3}{t^3} = 3 \ ;$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,0) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left(\frac{0 + 2t^2}{t^2} - 2\right) = 0 \ .$$

Quindi si ha $\nabla f(1,0) = (3,0)$.

3. Per quanto riguarda la differenziabilità, facendo prima uno sviluppo di Taylor al terzo ordine per la funzione $t \mapsto \sin t$, con $t = 3h^3$ e poi passando in coordinate polari, centrate nell'origine, si ottiene

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}}\left(\frac{\sin(3h^3)}{h^2+k^2} - 3h\right) = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{3h^3 + \frac{1}{3!}27h^9 - 3h^3 - 3hk^2}{(h^2+k^2)^{3/2}}$$

$$= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\frac{9}{2}h^9 - 3hk^2}{(h^2+k^2)^{3/2}} = \lim_{\rho\to 0^+} \frac{-3\rho^3\cos\theta\sin^2\theta + \frac{9}{2}\rho^9\cos^9\theta}{\rho^3} \neq 0 \ ,$$

quindi f non è differenziabile in $(1,0)$.

Esercizio 4

Utilizzando lo sviluppo al terzo ordine per la funzione $t \mapsto \sin t$, con $t = 2x$, e lo sviluppo di Mc Laurin al terzo ordine per la funzione $t \mapsto \log(1+x)$, otteniamo

$$\sin 2x = 2x - \frac{8x^3}{6} + o(x^4)$$

$$2\log(1+x) = 2x - \frac{2x^2}{2} + \frac{2x^3}{3} + o(x^3)$$

da cui

$$f(x) = \sin(2x) - 2\log(1+x) - x^2 = \left(2x - \frac{8x^3}{6} + o(x^4)\right) - \left(2x - \frac{2x^2}{2} + \frac{2x^3}{3} + o(x^3)\right) - x^2 = -2x^3 + o(x^3)\,.$$

Quindi la funzione assegnata è un infinitesimo del terzo ordine per $x \to 0^+$.

Esercizio 5

La funzione integranda è continua su tutto l'intervallo $(0,+\infty)$, per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$; pertanto, per stabilire il comportamento dell'integrale proposto dobbiamo studiare l'integranda in un intorno destro di 0 ed in un intorno di $+\infty$. In $U(0^+)$ otteniamo

$$f(x) = \frac{x^\alpha\sqrt{1+x}}{\sqrt[4]{2+x^5}} \sim \frac{x^\alpha}{\sqrt[4]{2}} = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}\frac{1}{x^{-\alpha}}$$ che è integrabile se e solo se $-\alpha < 1$, ovvero per $\alpha > -1$.

In $U(+\infty)$ otteniamo

$$f(x) = \frac{x^\alpha\sqrt{1+x}}{\sqrt[4]{2+x^5}} \sim \frac{x^\alpha x^{1/2}}{x^{5/4}} = \frac{1}{x^{5/4-1/2-\alpha}}$$

che è integrabile se e solo se $5/4 - 1/2 - \alpha > 1$, ovvero per $\alpha < -1/4$.

Concludendo, l'integrale improprio proposto esiste finito se e solo se $-1 < \alpha < -1/4$.

Esercizio 6

a) L'affermazione è corretta, infatti $f'(-1) = f'(2) = 0$ e, come conseguenza della concavità, f' è decrescente. Quindi $f'(x) = 0$ per ogni $x \in [-1,2]$, ovvero f è costante in $[-1,2]$.

b) L'affermazione è corretta, infatti se $f''(x) < 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, si ha che f' è una funzione strettamente decrescente e quindi può attraversare l'asse x al più una volta.

c) L'affermazione è corretta, infatti se $f'(-1) > 0$ ed $f'(0) < 0$, per il teorema degli zeri deve esistere un punto $x_M \in (-1,0)$ in cui $f'(x_M) = 0$. Essendo f concava, il punto stazionario x_M è un massimo.

d) L'affermazione è errata, basta prendere $f(x) = -\mathrm{e}^x$, che è concava ($f''(x) = -\mathrm{e}^x < 0$) e sempre strettamente decrescente.

SOLUZIONI COMPITO D

Esercizio 1

Chiaramente la serie proposta è una serie a termini positivi. Osserviamo, inoltre, che, utilizzando la formula di Mc Laurin al secondo ordine per la funzione $t \mapsto \cos t$, con $t = \exp(1/\sqrt{n}) - 1$, ed al primo ordine per la funzione $t \mapsto \mathrm{e}^t$, con $t = 1/\sqrt{n}$, si ottiene:

$$a_n := \frac{1}{n\sqrt{n}\left\{1 - \cos\left[\exp\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - 1\right]\right\}} \sim \frac{1}{n\sqrt{n}\,\frac{\left[\exp\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)-1\right]^2}{2}} \sim \frac{1}{n\sqrt{n}\,\frac{1}{2n}} = \frac{2}{\sqrt{n}}\,.$$

Quindi, per il criterio del confronto asintotico con la serie armonica generalizzata di esponente minore di 1, la serie proposta diverge.

Esercizio 2

1. L'equazione differenziale proposta è un'equazione a variabili separabili che ha come soluzioni singolari $y(x) = 1$ e $y(x) = -2$. Per determinare le altre soluzioni di tale equazione, procediamo per separazione di variabili, ottenendo

$$\int \frac{3}{(y-1)(y+2)}\,dy = \int dx \quad \Longrightarrow \quad \int \frac{1}{y-1}\,dy - \int \frac{1}{y+2}\,dy = x + C$$
$$\Longrightarrow \quad \log\left|\frac{y-1}{y+2}\right| = x + C \quad \Longrightarrow \quad \frac{y-1}{y+2} = \tilde{C}\mathrm{e}^x \qquad \tilde{C} \in \mathbb{R}\,.$$

Pertanto l'integrale generale sarà dato da $y(x) = \frac{1+2\tilde{C}\mathrm{e}^x}{1-\tilde{C}\mathrm{e}^x}$. Osserviamo che per $\tilde{C} = 0$ si riottiene la soluzione singolare $y(x) = 1$, mentre per nessun valore di $\tilde{C}$ si recupera la soluzione singolare $y(x) = -2$.

2. Imponendo la condizione iniziale, si ricava

$$\lambda = y(0) = \frac{1+2\tilde{C}}{1-\tilde{C}} \qquad \Longrightarrow \qquad \tilde{C} = \frac{\lambda - 1}{\lambda + 2}.$$

Quindi, per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$, otteniamo che la soluzione cercata è data da

$$y_\lambda(x) = \frac{\lambda + 2 + 2(\lambda - 1)\mathrm{e}^x}{\lambda + 2 - (\lambda - 1)\mathrm{e}^x}\,.$$

Osserviamo che per $\lambda = 1$ si riottiene la soluzione singolare $y(x) = 1$, mentre per $\lambda = -2$ si recupera la soluzione singolare $y(x) = -2$.

3. Infine otteniamo

$$\lim_{x\to+\infty} y_\lambda(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\lambda + 2 + 2(\lambda - 1)\mathrm{e}^x}{\lambda + 2 - (\lambda - 1)\mathrm{e}^x} = \begin{cases} -2 & \text{se } \lambda \neq 1, \\ 1 & \text{se } \lambda = 1. \end{cases}$$

Esercizio 3

1. La funzione considerata è chiaramente continua in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,-1)\}$, in quanto è composizione, somma e rapporto di funzioni continue, con il denominatore mai nullo. Per studiarne la continuità nel punto $(0,-1)$, procediamo attraverso la definizione. Utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al primo ordine per la funzione $t \mapsto \mathrm{e}^t$, con $t = 3(y+1)^3$ e passando alle coordinate polari centrate in $(0,-1)$, otteniamo

$$\lim_{(x,y)\to(0,-1)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,-1)} \frac{3(y+1)^3}{x^2 + (y+1)^2} + 1 = \lim_{\rho\to0^+} \frac{3\rho^3 \sin^3\theta}{\rho^2} + 1 = \lim_{\rho\to0^+} 3\rho\sin^3\theta + 1 = 1$$

indipendentemente da θ. Poiché $f(0,-1) = 1$, la funzione f risulta continua anche in $(0,-1)$ e quindi $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^2)$.

2. Derivate parziali:
$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,-1) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left(\frac{1-1+t^2}{t^2} - 1\right) = 0\ ;$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,-1) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left(\frac{\mathrm{e}^{3t^3}-1+t^2}{t^2} - 1\right) = \lim_{t\to 0} \frac{\mathrm{e}^{3t^3}-1}{t^3} = 3\ .$$
Quindi si ha $\nabla f(0,-1) = (0,3)$.
3. Per quanto riguarda la differenziabilità, facendo prima uno sviluppo di Taylor al secondo ordine per la funzione $t \mapsto \mathrm{e}^t$, con $t = 3k^3$ e poi passando in coordinate polari, centrate nell'origine, si ottiene
$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}}\left(\frac{\mathrm{e}^{3k^3}-1}{h^2+k^2} - 3k\right) = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{3k^3 + \frac{1}{2}9k^6 - 3h^2k - 3k^3}{(h^2+k^2)^{3/2}}$$
$$= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\frac{9}{2}k^6 - 3h^2k}{(h^2+k^2)^{3/2}} = \lim_{\rho\to 0^+} \frac{-3\rho^3\cos^2\theta\sin\theta + \frac{9}{2}\rho^6\sin^6\theta}{\rho^3} \neq 0\ ,$$
quindi f non è differenziabile in $(0,-1)$.

Esercizio 4

Utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al secondo ordine per la funzione $t \mapsto \mathrm{e}^t$, con $t = -x/4$, e lo sviluppo al quarto ordine per la funzione $t \mapsto \cos t$, con $t = \sqrt{x/2}$, otteniamo
$$\mathrm{e}^{-x/4} = 1 - \frac{x}{4} + \frac{x^2}{32} + o(x^2)$$
$$\cos\sqrt{\frac{x}{2}} = 1 - \frac{x}{4} + \frac{x^2}{4!4} + o(x^2\sqrt{x})$$
da cui
$$f(x) = \mathrm{e}^{-x/4} - \cos\sqrt{\frac{x}{2}} = \left(1 - \frac{x}{4} + \frac{x^2}{32} + o(x^2)\right) - \left(1 - \frac{x}{4} + \frac{x^2}{4!4} + o(x^2\sqrt{x})\right) = \frac{x^2}{48} + o(x^2)\,.$$
Quindi la funzione assegnata è un infinitesimo del secondo ordine per $x \to 0^+$.

Esercizio 5

La funzione integranda è continua su tutto l'intervallo $(0,+\infty)$, per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$; pertanto, per stabilire il comportamento dell'integrale proposto dobbiamo studiare l'integranda in un intorno destro di 0 ed in un intorno di $+\infty$. In $U(0^+)$ otteniamo
$$f(x) = \frac{\sqrt[4]{2+x}}{x^\alpha\sqrt[3]{3+x^4}} \sim \frac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt[3]{3}\,x^\alpha} \qquad \text{che è integrabile se e solo se } \alpha < 1.$$
In $U(+\infty)$ otteniamo
$$f(x) = \frac{\sqrt[4]{2+x}}{x^\alpha\sqrt[3]{3+x^4}} \sim \frac{x^{1/4}}{x^\alpha x^{4/3}} = \frac{1}{x^{\alpha+4/3-1/4}}$$
che è integrabile se e solo se $\alpha + 4/3 - 1/4 > 1$, ovvero per $\alpha > -1/(12)$.

Concludendo, l'integrale improprio proposto esiste finito se e solo se $-1/(12) < \alpha < 1$.

Esercizio 6

a) L'affermazione è corretta, infatti se $f'(0) < 0$ ed $f'(1) > 0$, per il teorema degli zeri deve esistere un punto $x_m \in (0,1)$ in cui $f'(x_m) = 0$. Essendo f convessa, il punto stazionario x_m è un minimo.

b) L'affermazione è corretta, infatti se $f''(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, si ha che f' è una funzione strettamente crescente e quindi può attraversare l'asse x al più una volta.

c) L'affermazione è corretta, infatti $f'(0) = f'(1) = 0$ e, come conseguenza della convessità, f' è crescente. Quindi $f'(x) = 0$ per ogni $x \in [0,1]$, ovvero f è costante in $[0,1]$.

d) L'affermazione è errata, basta prendere $f(x) = \mathrm{e}^x$, che è convessa ($f''(x) = \mathrm{e}^x > 0$) e sempre strettamente crescente.