SOLUZIONI COMPITO A

Esercizio 1. Ricordando la regole di derivazione parziale, si ottiene

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{e^{x^2}+1}{\ln(x^2+1)}2y \ .$$

Esercizio 2. L'equazione proposta si può riscrivere nella forma $z^4 = -16$, pertanto dalla formula delle radici si ottiene

$$z = \sqrt[4]{-16} = \begin{cases} 2\ e^{i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}(1+i) \\ 2\ e^{i\frac{3\pi}{4}} = \sqrt{2}(-1+i) \\ 2\ e^{i\frac{5\pi}{4}} = \sqrt{2}(-1-i) \\ 2\ e^{i\frac{7\pi}{4}} = \sqrt{2}(1-i) \end{cases} .$$

Esercizio 3. Utilizzando la sostituzione di variabile $t = e^x$ da cui $dt = e^x\ dx$, si ottiene

$$I = \int \sin t\ dt = -\cos t + C = -\cos(e^x) + C \ .$$

Esercizio 4. Poiché $e^x - 1 \sim x$ per $x \to 0$ e ricordando che in un polinomio domina l'infinitesimo di potenza inferiore, si ottiene

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^x - 1}{x^2 + 2\sqrt[3]{x} - x^3} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{2\sqrt[3]{x}} = 0 \ .$$

Esercizio 5. L'equazione proposta è lineare del primo ordine non omogenea, pertanto la soluzione è data da

$$y(x) = 2e^{3x} - 2e^{2x} \ .$$

Esercizio 6.
Osserviamo che, dal Teorema di Torricelli, si ha

$$F'(x) = 2x(x^4 - 2x^2)e^{x^2}\log(1+x^4) = 2x^3(x^2-2)e^{x^2}\log(1+x^4)$$

da cui segue facilmente che $F'(x) = 0$ per $x = 0, \pm\sqrt{2}$; inoltre $F'(x) > 0$ per $-\sqrt{2} < x < 0$ e $x > \sqrt{2}$, ed $F'(x) < 0$ per $x < -\sqrt{2}$ e $0 < x < \sqrt{2}$. Pertanto $x = \pm\sqrt{2}$ sono punti di minimo, mentre $x = 0$ è punto di massimo.

Esercizio 7.
Poiché, per $\alpha > 0$,

$$\left(\arctan \frac{1}{n^\alpha}\right) n^{3-\alpha} \sim n^{3-2\alpha} \quad \text{per } n \to \infty,$$

dal criterio del confronto infinitesimo segue che la serie converge se e solo se $\alpha > 2$.

Domanda 1.
Poiché $E = \{x \in \mathbb{R}\ :\ x < 3\} = (-\infty, 3)$, l'insieme proposto non è inferiormente limitato.

Domanda 2.
L'unca affermazione corretta è la (b).

Domanda 3.
Un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ si dice punto di minimo assoluto per $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se $f(x_0) \leq f(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

SOLUZIONI COMPITO B

Esercizio 1. Ricordando la regole di derivazione parziale, si ottiene

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\arctan y}{1+\mathrm{e}^{\sin^2 y}}\mathrm{e}^x \ .$$

Esercizio 2. L'equazione proposta si può riscrivere nella forma $z^4 = 16$, pertanto dalla formula delle radici si ottiene

$$z = \sqrt[4]{16} = \begin{cases} 2 \\ 2i \\ -2 \\ -2i \end{cases} \quad .$$

Esercizio 3. Utilizzando la sostituzione di variabile $t = \mathrm{e}^x$ da cui $dt = \mathrm{e}^x\ dx$, si ottiene

$$I = \int (t^2+1)\ dt = \frac{t^3}{3} + t + C = \frac{\mathrm{e}^{3x}}{3} + \mathrm{e}^x + C \ .$$

Esercizio 4. Poiché $\log(1+x) \sim x$ per $x \to 0$ e ricordando che in un polinomio domina l'infinitesimo di potenza inferiore, si ottiene

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1+x)}{2x^4 - \sqrt{x} + x^2} = -\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\sqrt{x}} = 0 \ .$$

Esercizio 5. L'equazione proposta è lineare del primo ordine non omogenea, pertanto la soluzione è data da

$$y(x) = \frac{1}{4}\mathrm{e}^{5x} - \frac{1}{4}\mathrm{e}^x \ .$$

Esercizio 6.
Osserviamo che, dal Teorema di Torricelli, si ha

$$F'(x) = \frac{\mathrm{e}^{x^2}(2x^2 - x^4)}{\pi - 2\arctan x^2} 2x = 2x^3(2-x^2)\frac{\mathrm{e}^{x^2}}{\pi - 2\arctan x^2}$$

da cui segue facilmente che $F'(x) = 0$ per $x = 0, \pm\sqrt{2}$; inoltre $F'(x) < 0$ per $-\sqrt{2} < x < 0$ e $x > \sqrt{2}$, ed $F'(x) > 0$ per $x < -\sqrt{2}$ e $0 < x < \sqrt{2}$. Pertanto $x = \pm\sqrt{2}$ sono punti di massimo, mentre $x = 0$ è punto di minimo.

Esercizio 7.
Poiché, per $\alpha > 0$,

$$\left(\sin \frac{1}{n^{3\alpha}}\right) n^{\frac{3}{2}-2\alpha} \sim n^{\frac{3}{2}-5\alpha} \quad \text{per } n \to \infty,$$

dal criterio del confronto infinitesimo segue che la serie converge se e solo se $\alpha > \frac{1}{2}$.

Domanda 1.
Poiché $E = \{x \in \mathbb{R}\ :\ x > -2\} = (-2, +\infty)$, l'insieme proposto non è superiormente limitato.

Domanda 2.
L'unca affermazione corretta è la (c).

Domanda 3.
Un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ si dice punto di massimo assoluto per $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se $f(x_0) \geq f(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

SOLUZIONI COMPITO C

Esercizio 1. Ricordando la regole di derivazione parziale, si ottiene

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2\frac{\log(1+y^2)}{\pi + \arctan y} \ .$$

Esercizio 2. L'equazione proposta si può riscrivere nella forma $z^3 = 8$, pertanto dalla formula delle radici si ottiene

$$z = \sqrt[3]{8} = \begin{cases} 2 \\ 2\ \mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{3}} = -1 + i\sqrt{3} \\ 2\ \mathrm{e}^{i\frac{4\pi}{3}} = -1 - i\sqrt{3} \end{cases} \quad .$$

Esercizio 3. Utilizzando la sostituzione di variabile $t = \log x$ da cui $dt = \frac{1}{x}\ dx$, si ottiene

$$I = \int \cos(2t)\ dt = \frac{\sin(2t)}{2} + C = \frac{\sin(2\log x)}{2} + C \ .$$

Esercizio 4. Poiché $\log(2+x) \sim \log x$ per $x \to +\infty$ e ricordando che in un polinomio domina l'infinito di potenza superiore, si ottiene

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(2+x)}{3x^3 - 1 + 2x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\log x}{3x^3} = 0 \ .$$

Esercizio 5. L'equazione proposta è lineare del primo ordine non omogenea, pertanto la soluzione è data da

$$y(x) = \mathrm{e}^{4x} - \mathrm{e}^{3x} \ .$$

Esercizio 6.
Osserviamo che, dal Teorema di Torricelli, si ha

$$F'(x) = 2\frac{(2x+1)^2 + (2x+1)}{\log[2 + (2x+1)^2]} = 4\frac{2x^2 + 3x + 1}{\log[2 + (2x+1)^2]}$$

da cui segue facilmente che $F'(x) = 0$ per $x = -1, -1/2$; inoltre $F'(x) > 0$ per $x < -1$ e $x > -1/2$, ed $F'(x) < 0$ per $-1 < x < -1/2$. Pertanto $x = -1/2$ è punto di minimo, mentre $x = -1$ è punto di massimo.

Esercizio 7.
Poiché, per $\alpha > 0$,

$$\left(\cos\frac{1}{n^\alpha} - 1\right) n^{1-\alpha} \sim -\frac{1}{2} n^{1-3\alpha} \quad \text{per } n \to \infty,$$

dal criterio del confronto infinitesimo segue che la serie converge se e solo se $\alpha > \frac{2}{3}$.

Domanda 1.
Poiché $E = \{x \in \mathbb{R} \ : \ x > 1\} = (1, +\infty)$, l'insieme proposto è inferiormente limitato.

Domanda 2.
L'unca affermazione corretta è la (d).

Domanda 3.
Una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice monotona crescente se, per ogni coppia di numeri $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tali che $x_1 \leq x_2$ si ha $f(x_1) \leq f(x_2)$.

SOLUZIONI COMPITO D

Esercizio 1. Ricordando la regole di derivazione parziale, si ottiene

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \left(\frac{3x^2 \mathrm{e}^x}{\arcsin x + 2}\right)\frac{1}{y} \ .$$

Esercizio 2. L'equazione proposta si può riscrivere nella forma $z^3 = -8$, pertanto dalla formula delle radici si ottiene

$$z = \sqrt[3]{-8} = \begin{cases} 2\ \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}} = 1 + i\sqrt{3} \\ -2 \\ 2\ \mathrm{e}^{i\frac{5\pi}{3}} = 1 - i\sqrt{3} \end{cases} .$$

Esercizio 3. Utilizzando la sostituzione di variabile $t = \log x$ da cui $dt = \frac{1}{x}\ dx$, si ottiene

$$I = \int \frac{1}{1+t^2}\ dt = \arctan t + C = \arctan(\log x) + C \ .$$

Esercizio 4. Poiché $\mathrm{e}^x + 1 \sim \mathrm{e}^x$ per $x \to +\infty$ e ricordando che in un polinomio domina l'infinito di potenza superiore, si ottiene

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^4 + \sqrt[2]{x} + 2x^3}{\mathrm{e}^x + 1}. = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^4}{\mathrm{e}^x} = 0 \ .$$

Esercizio 5. L'equazione proposta è lineare del primo ordine non omogenea, pertanto la soluzione è data da

$$y(x) = -\mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^{3x} \ .$$

Esercizio 6.
Osserviamo che, dal Teorema di Torricelli, si ha

$$F'(x) = 3\frac{(3x+2)^2 - (3x+2)}{\mathrm{e}^{2+\sin(3x+2)}} = 3\frac{9x^2 + 9x + 2}{\mathrm{e}^{2+\sin(3x+2)}}$$

da cui segue facilmente che $F'(x) = 0$ per $x = -2/3, -1/3$; inoltre $F'(x) > 0$ per $x < -2/3$ e $x > -1/3$, ed $F'(x) < 0$ per $-2/3 < x < -1/3$. Pertanto $x = -1/3$ è punto di minimo, mentre $x = -2/3$ è punto di massimo.

Esercizio 7.
Poiché, per $\alpha > 0$,

$$\left(\sqrt{1 + \frac{1}{n^\alpha}} - 1\right) n^{2-\alpha} \sim \frac{1}{2} n^{2-2\alpha} \quad \text{per } n \to \infty,$$

dal criterio del confronto infinitesimo segue che la serie converge se e solo se $\alpha > \frac{3}{2}$.

Domanda 1.
Poiché $E = \{x \in \mathbb{R} \ : \ x < 3\} = (-\infty, 3)$, l'insieme proposto è superiormente limitato.

Domanda 2.
L'unca affermazione corretta è la (a).

Domanda 3.
Una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice monotona decrescente se, per ogni coppia di numeri $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tali che $x_1 \leq x_2$ si ha $f(x_1) \geq f(x_2)$.