SOLUZIONI COMPITO INTEGRATIVO

Esercizio 1

Poiché la funzione proposta è non negativa e continua nell'intervallo $(0, +\infty)$, studiando il suo comportamento per $x \to 0^+$ e per $x \to +\infty$ otteniamo

$$\text{per } x \to +\infty \quad f(x) \le \frac{1 \cdot \sqrt{x+1}}{\sqrt{x}\,(\mathrm{e}^x - 1)} \sim \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}\,\mathrm{e}^x} = \frac{1}{\mathrm{e}^x} \quad \text{che è impropriamente integrabile;}$$

$$\text{per } x \to 0^+ \quad f(x) \sim \frac{x}{x^{1/2} \cdot x} = \frac{1}{x^{1/2}} \quad \text{che è impropriamente integrabile.}$$

Pertanto la funzione proposta risulta impropriamente integrabile in $(0, +\infty)$.

Esercizio 2

Osserviamo che si tratta di una serie a termini non negativi. Utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al primo ordine per il $\log(1+t)$, con $t = 1/(n+1)!$ e per il $\sin t$, con $t = 1/(2n+1)$, otteniamo

$$\log\left(1 + \frac{1}{(n+1)!}\right) = \frac{1}{(n+1)!} + o\big(1/(n+1)!\big)\,, \qquad \sin\left(\frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{2n+1} + o\big(1/(2n+1)\big)\,,$$

e quindi per il termine generale a_n si ha

$$a_n = n!\,\log\left(1 + \frac{1}{(n+1)!}\right)\sin\left(\frac{1}{2n+1}\right) \sim n!\,\frac{1}{(n+1)!}\,\frac{1}{2n+1} = \frac{1}{(n+1)(2n+1)} \sim \frac{1}{2n^2}\,.$$

Pertanto, per il criterio del confronto asintotico con la serie armonica generalizzata, otteniamo che la serie proposta converge.

Esercizio 3

L'insieme di definizione della funzione assegnata f è dato da $D = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ e $f \in \mathcal{C}^\infty(D)$. Per quanto riguarda i limiti alla frontiera si ha

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x - 1} + x\right) = \lim_{x\to-\infty} x = -\infty\,;\\
&\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x - 1} + x\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x} + x\right) = +\infty\,;\\
&\lim_{x\to0^\pm}\left(\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x - 1} + x\right) = \lim_{x\to0^\pm}\frac{1}{x} = \pm\infty\,.
\end{aligned}$$

Pertanto, la retta di equazione $x = 0$ è asintoto verticale per f, per $x \to 0^\pm$, mentre non ci sono asintoti orizzontali. Inoltre, poiché per $x \to \pm\infty$ la funzione è un infinito di ordine 1, controlliamo se essa ha un asintoto obliquo. A $-\infty$ si ha

$$\begin{aligned}
m &= \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\mathrm{e}^x}{x(\mathrm{e}^x - 1)} + 1\right) = 1\,;\\
q &= \lim_{x\to-\infty}(f(x) - x) = \lim_{x\to-\infty}\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x - 1} = 0\,.
\end{aligned}$$

Pertanto, la retta di equazione $y = x$ è asintoto obliquo per f, per $x \to -\infty$. A $+\infty$ si ha

$$\begin{aligned}
m &= \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\mathrm{e}^x}{x(\mathrm{e}^x - 1)} + 1\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\mathrm{e}^x}{x\,\mathrm{e}^x} + 1\right) = 1\,;\\
q &= \lim_{x\to+\infty}(f(x) - x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x} = 1\,.
\end{aligned}$$

Pertanto, la retta di equazione $y = x + 1$ è asintoto obliquo per f, per $x \to +\infty$.

Esercizio 4

Ponendo $z = a + ib$, l'equazione proposta si può riscrivere nella forma

$$a^2 - b^2 + 2iab + a^2 + b^2 + 2a = 2b \qquad \text{ovvero} \qquad \begin{cases} 2a^2 + 2a = 2b \\ 2ab = 0\,. \end{cases}$$

Risolvendo la seconda equazione del sistema così ottenuto, si ricava

$$\begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases} \qquad \text{oppure} \qquad \begin{cases} b = 0 \\ a(a+1) = 0 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad a = 0 \;\text{ e }\; a = -1\,.$$

Pertanto, le soluzioni cercate sono $z = 0$ e $z = -1$.