SOLUZIONI COMPITO A

Esercizio 1

C.E. $= (-1, +\infty)$;

$F(x) > 0 \quad \forall x \in (-1, +\infty) \setminus \{0\}$; $\qquad F(0) = 0$;

$\lim_{x\to -1^+} F(x) = \alpha > 0$; $\qquad \lim_{x\to +\infty} F(x) = +\infty$;

$F'(x) = \dfrac{\log(x+1)}{\sqrt{|x-1|}}$; $\qquad \lim_{x\to -1^+} F'(x) = -\infty$; $\qquad \lim_{x\to 1^\pm} F'(x) = +\infty$;

$F'(x) > 0 \quad \forall x \in (0, +\infty) \setminus \{1\}$; $\qquad F'(x) < 0 \quad \forall x \in (-1, 0)$; $\qquad F'(x) = 0 \quad x = 0$.

La funzione assegnata non ha asintoti di nessun genere, il punto $x = 0$ è punto di minimo assoluto ed il punto $x = 1$ è punto di flesso a tangente verticale.

Esercizio 2

Ricordando che cotan $x = \frac{\cos x}{\sin x}$, l'integrale proposto si può riscrivere nella forma

$$\int \frac{\sin x}{2\cos x + 3\sin^2 x}\, dx = \int \frac{\sin x}{2\cos x + 3 - 3\cos^2 x}\, dx \ .$$

Osservando inoltre che $-\sin x$ è la derivata di $\cos x$, si può effettuare il cambiamento di variabile $y = \cos x$, riconducendosi così al calcolo dell'integrale

$$\int \frac{1}{3y^2 - 2y - 3}\, dy = (1/2\sqrt{10}) \left[\int \frac{1}{y - \frac{1+\sqrt{10}}{3}} - \int \frac{1}{y - \frac{1-\sqrt{10}}{3}} \right] = (1/2\sqrt{10}) \log \left| \frac{y - \frac{1+\sqrt{10}}{3}}{y - \frac{1-\sqrt{10}}{3}} \right| + cost \ .$$

Pertanto

$$\int \frac{1}{2\text{cotan }x + 3\sin x}\, dx = (1/2\sqrt{10}) \log \left| \frac{\cos x - \frac{1+\sqrt{10}}{3}}{\cos x - \frac{1-\sqrt{10}}{3}} \right| + cost \ .$$

Esercizio 3

Effettuando un cambiamento in coordinate polari centrate nel punto $(3, 1)$, si ottiene

$$\lim_{(x,y)\to(3,1)} \frac{x[(x-3)^2 + (y-1)^2]^{\alpha/2}}{x^2 + y^2 - 6x - 2y + 10} = \lim_{\rho\to 0^+} \frac{(3 + \rho\cos\theta)\rho^\alpha}{\rho^2} = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha > 2; \\ 3 & \text{se } \alpha = 2; \\ +\infty & \text{se } \alpha < 2. \end{cases}$$

Esercizio 4

Osserviamo innanzitutto che $P_0 = \gamma(0)$ e che il vettore tangente a γ in P_0 è dato da

$$\tau(P_0) = \left(\frac{(\alpha+1)\sqrt{3}}{4}, 1 \right) \ .$$

Pertanto, poiché a sua volta il vettore tangente alla retta assegnata è dato da $(\sqrt{3}/4, 1)$, le due rette saranno parallele se e solo se $\alpha = 0$.

SOLUZIONI COMPITO B

Esercizio 1

C.E. $= (0, +\infty)$;

$F(x) < 0 \quad \forall x \in (0, +\infty) \setminus \{1\}$; $\qquad F(1) = 0$;

$\lim_{x \to 0^+} F(x) = \alpha < 0$; $\qquad \lim_{x \to +\infty} F(x) = -\infty$;

$F'(x) = -\dfrac{\log x}{\sqrt{|x-2|}}$; $\qquad \lim_{x \to 0^+} F'(x) = +\infty$; $\qquad \lim_{x \to 2^\pm} F'(x) = -\infty$;

$F'(x) < 0 \quad \forall x \in (1, +\infty) \setminus \{2\}$; $\qquad F'(x) > 0 \quad \forall x \in (0, 1)$; $\qquad F'(x) = 0 \quad x = 1$.

La funzione assegnata non ha asintoti di nessun genere, il punto $x = 1$ è punto di massimo assoluto ed il punto $x = 2$ è punto di flesso a tangente verticale.

Esercizio 2

Ricordando che cotan $x = \frac{\cos x}{\sin x}$, l'integrale proposto si può riscrivere nella forma

$$\int \frac{\sin x}{\cos x + \sin^2 x}\ dx = \int \frac{\sin x}{\cos x + 1 - \cos^2 x}\ dx\ .$$

Osservando inoltre che $-\sin x$ è la derivata di $\cos x$, si può effettuare il cambiamento di variabile $y = \cos x$, riconducendosi così al calcolo dell'integrale

$$\int \frac{1}{y^2 - y - 1}\ dy = (1/\sqrt{5}) \left[\int \frac{1}{y - \frac{1+\sqrt{5}}{2}} - \int \frac{1}{y - \frac{1-\sqrt{5}}{2}} \right] = (1/\sqrt{5}) \log \left| \frac{y - \frac{1+\sqrt{5}}{2}}{y - \frac{1-\sqrt{5}}{2}} \right| + cost\ .$$

Pertanto

$$\int \frac{1}{\text{cotan}\ x + \sin x}\ dx = (1/\sqrt{5}) \log \left| \frac{\cos x - \frac{1+\sqrt{5}}{2}}{\cos x - \frac{1-\sqrt{5}}{2}} \right| + cost\ .$$

Esercizio 3

Effettuando un cambiamento in coordinate polari centrate nel punto $(1, 2)$, si ottiene

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{y[(x-1)^2 + (y-2)^2]^{\alpha/2}}{x^2 + y^2 - 2x - 4y + 5} = \lim_{\rho \to 0^+} \frac{(2 + \rho \sin\theta)\rho^\alpha}{\rho^2} = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha > 2; \\ 2 & \text{se } \alpha = 2; \\ +\infty & \text{se } \alpha < 2. \end{cases}$$

Esercizio 4

Osserviamo innanzitutto che $P_0 = \gamma(0)$ e che il vettore tangente a γ in P_0 è dato da

$$\tau(P_0) = \left(\frac{\alpha}{2}, 1 \right)\ .$$

Pertanto, poiché a sua volta il vettore tangente alla retta assegnata è dato da $(1, 1)$, le due rette saranno parallele se e solo se $\alpha = 2$.