SOLUZIONI COMPITO dello 20/10/2017
ANALISI MATEMATICA I - 9 CFU
MECCANICA + ENERGETICA

Esercizio 1

Riscrivendo il limite proposto nella forma

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{\frac{n^3+1}{n^2+1}}=\lim_{n\to+\infty}\exp\left[\left(\frac{n^3+1}{n^2+1}\right)\log\left(\frac{n+2}{n+1}\right)\right],$$

e studiando il comportamento dell'esponente, si ricava

$$\left(\frac{n^3+1}{n^2+1}\right)\log\left(\frac{n+2}{n+1}\right)=\left(\frac{n^3+1}{n^2+1}\right)\log\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\sim\left(\frac{n^3}{n^2}\right)\left(\frac{1}{n+1}\right)\sim n\,\frac{1}{n}=1\,.$$

Pertanto, il limite proposto vale $e^1=e$.

Esercizio 2

Tenendo conto della regolarità della funzione proposta, per determinarne i punti di massimo e minimo relativo, studiamo la sua derivata, data da

$$f'(x)=\cos x-\cos x+x\sin x-\frac{x}{2}=x\left(\sin x-\frac{1}{2}\right)\begin{cases}>0 & \text{se } -\pi<x<0 \text{ oppure } \pi/6<x<5\pi/6;\\ =0 & \text{se } x=0;\pi/6;5\pi/6;\\ <0 & \text{se } 0<x<\pi/6 \text{ oppure } 5\pi/6<x<\pi.\end{cases}$$

Pertanto, la funzione sarà crescente in $[-\pi,0)\cup(\pi/6,5\pi/6)$ e decrescente in $(0,\pi/6)\cup(5\pi/6,\pi]$, da cui segue che $x=-\pi;\pi/6;\pi$ sono punti di minimo relativo, mentre $x=0;5\pi/6$ sono punti di massimo relativo.

Esercizio 3

L'equazione differenziale proposta è un'equazione differenziale lineare del primo ordine omogenea (che, quindi, risulta essere anche un'equazione a variabili separabili), che può essere riscritta nella forma $y'(x)-xe^xy(x)=0$. Osserviamo, innanzitutto, che essendo il coefficiente $a(x):=-xe^x$ una funzione continua su tutto l'asse reale, per il teorema di esistenza e unicità in grande, esiste un'unica soluzione definita su tutto $\mathbb{R}$ Per determinarla, utilizzando la formula di integrazione per parti, calcoliamo dapprima

$$\int a(x)\,dx=-\int xe^x\,dx=-xe^x+\int e^x\,dx=-xe^x+e^x+C\,.$$

Utilizzando, quindi, la formula risolutiva delle equazioni differenziali lineari del primo ordine, ricaviamo

$$y(x)=K\exp\left(xe^x-e^x\right)\,.$$

Imponendo, infine, la condizione iniziale, otteniamo $k=e$, ovvero $y(x)=\exp\left(xe^x-e^x+1\right)$.

Esercizio 4

Osserviamo che l'equazione proposta può essere riscritta nella forma $z^4=-4$, quindi si tratta di determinare le 4 radici quarte di -4. Tenendo conto che $-4=4e^{i\pi}$, si ricava, per $k=0,1,2,3$,

$$z=\sqrt[4]{4e^{i\pi}}=\sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi+2k\pi}{4}\right)}=\sqrt{2}e^{i(\pi/4+k\pi/2)}=\begin{cases}\sqrt{2}e^{i\pi/4}=1+i\,,\\ \sqrt{2}e^{i3\pi/4}=-1+i\,,\\ \sqrt{2}e^{i5\pi/4}=-1-i\,,\\ \sqrt{2}e^{i7\pi/4}=1-i\,.\end{cases}$$

Esercizio 5

i) Per l'enunciato e la dimostrazione si veda il libro di testo.

ii) Ponendo $f(x)=1+x\cos x$, si osserva che $f(\pi/2)=1>0$ ed $f(\pi)=1-\pi<0$; pertanto, per il Teorema degli zeri, si ottiene che esiste almeno un punto $x_0\in(\pi/2,\pi)$ tale che $f(x_0)=0$, quindi l'equazione proposta ammette almeno una soluzione. Inoltre, tenendo con che $f'(x)=\cos x-x\sin x<0$ in $[\pi/2,\pi]$, si ricava che f strettamente decrescente, pertanto attraversa l'asse delle x al più una sola volta, quindi la soluzione dell'equazione proposta è unica.