SOLUZIONI APPELLO del 22/10/2015
ANALISI MATEMATICA I - 9 CFU
MECCANICA - ENERGETICA

TEMA A

Esercizio 1

Dalla formula risolutiva per le equazioni di secondo grado, valida anche in $\mathbb{C}$, otteniamo

$$z = \frac{-\sqrt{2} + \sqrt{2-4}}{2} = \frac{-\sqrt{2} \pm i\sqrt{2}}{2} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \pm i\frac{1}{\sqrt{2}}\,.$$

Quindi le due soluzioni sono $z = \cos(3\pi/4) + i\sin(3\pi/4)$ e $z = \cos(5\pi/4) + i\sin(5\pi/4)$.

Esercizio 2

Innanzitutto, osserviamo che la serie proposta è a termini positivi. Inoltre, tenendo conto che, per $x \to 0$, $\log(1+x) \sim x$ e $\sin x \sim x$, con $x = \mathrm{e}^{-n}$, otteniamo

$$\frac{[\log(\mathrm{e}^{-n}+1)]^{\alpha^2}}{[\sin(\mathrm{e}^{-n})]^{2\alpha-1}} \sim \frac{(\mathrm{e}^{-n})^{\alpha^2}}{(\mathrm{e}^{-n})^{2\alpha-1}} = \frac{\mathrm{e}^{-\alpha^2 n}}{\mathrm{e}^{-(2\alpha-1)n}} = \frac{1}{\mathrm{e}^{(\alpha^2-2\alpha+1)n}}\,.$$

Pertanto, per confronto con la serie geometrica di ragione $q = \mathrm{e}^{-(\alpha^2-2\alpha+1)}$, la serie proposta converge se e solo se $q < 1$, ovvero per $\alpha^2 - 2\alpha + 1 > 0$, cioè $\alpha \neq 1$.

Esercizio 3

Integrando due volte per parti, dopo aver posto la prima volta $f'(x) = 1$ e $g(x) = \sin(\log x)$, da cui $f(x) = x$ e $g'(x) = \frac{\cos(\log x)}{x}$, e la seconda volta $f'(x) = 1$ e $g(x) = \cos(\log x)$, da cui $f(x) = x$ e $g'(x) = -\frac{\sin(\log x)}{x}$,, otteniamo

$$\int \sin(\log x)\,dx = x\sin(\log x) - \int \frac{x\cos(\log x)}{x}\,dx = x\sin(\log x) - \int \cos(\log x)\,dx =$$

$$x\sin(\log x) - x\cos(\log x) + \int \frac{x\sin(\log x)}{x}\,dx = x\sin(\log x) - x\cos(\log x) + \int \sin(\log x)\,dx\,.$$

Riportando l'inegrale a primo membro e dividendo poi tutto per 2, si ricava

$$2\int \sin(\log x)\,dx = x\sin(\log x) - x\cos(\log x)\,, \qquad \Longrightarrow \qquad \int \sin(\log x)\,dx = \frac{x}{2}[\sin(\log x) - \cos(\log x)] + C\,,$$

dove $C \in \mathbb{R}$.

Esercizio 4

Innanzitutto, osserviamo che l'equazione proposta è un'equazione differenziale lineare del secondo ordine a coefficienti costanti e non omogenea. L'equazione caratteristica ad essa associata è $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$ che ha come soluzione $\lambda = 1$ con molteplicità doppia. Pertanto, l'integrale generale dell'omogenea associata sarà $y_o(x) = C_1\mathrm{e}^x + C_2 x\mathrm{e}^x$. Dal metodo di somiglianza, invece, si ricava immediatamente che una soluzione particolare sarà della forma $y_p(x) = 1$. Pertanto, l'integrale generale dell'equazione proposta sarà $y(x) = C_1\mathrm{e}^x + C_2 x\mathrm{e}^x + 1$. Infine, si osserva facilmente che, affinché una soluzione ammetta limite finito per $x \to +\infty$, deve soddisfare la condizione $C_1 = C_2 = 0$, ovvero esiste un'unica soluzione dell'equazione proposta con la proprietà richiesta ed è data dalla funzione costante $y(x) \equiv 1$.

Esercizio 5

L'affermazione **A)** è vera, in quanto $f(x) + g(x) = x^2 + x^4 + o(x^4) + x + o(x^3) \sim x$, dove abbiamo tenuto conto che nella somma di infinitesimi di tipo potenza, domina il termine di esponente minore.
L'affermazione **B)** è vera, in quanto $f(x) - [g(x)]^2 = x^2 + x^4 + o(x^4) - x^2 + o(x^4) + o(x^6) = x^4 + o(x^4) \sim x^4$, dove abbiamo tenuto conto che $o(x^4) + o(x^6) = o(x^4)$.
Invece, l'affermazione **C)** è falsa, in quanto dalle ipotesi ricaviamo

$$f(x)+f(x^3)-g(x^2)-g(x^4) = x^2+x^4+o(x^4)+x^6+x^{12}+o(x^{12})-x^2+o(x^6)-x^4+o(x^{12}) = x^6+o(x^4) = o(x^4)\,,$$

pertanto, basta scegliere $f(x) = x+x^4+x^5$ e $g(x) = x$ e si ottiene $f(x)+f(x^3)-g(x^2)-g(x^4) = x^5+x^6+x^{12} \sim x^5$, negando così l'affermazione.
Infine, l'affermazione **D)** è falsa, in quanto dalle ipotesi ricaviamo

$$\frac{f(\sqrt{x}) - g(x) - g(x^2)}{x^3} = \frac{x + x^2 + o(x^2) - x + o(x^3) - x^2 + o(x^6)}{x^3} = \frac{o(x^2)}{x^3} + o(1) + o(x)\,,$$

quindi, scegliendo nuovamente $f(x) = x+x^4+x^5$ e $g(x) = x$, si ottiene $\frac{f(\sqrt{x})-g(x)-g(x^2)}{x^3} = \frac{x+x^2+x^{5/2}-x-x^2}{x^3} = \frac{1}{\sqrt{x}} \not\to 0$ per $x \to 0^+$, negando così l'affermazione.