A N A L I S I - II modulo	cognome e nome	matricola
23 Settembre 2004		

E1.

- Risolvere, per ogni $\lambda \in I\!R$ il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(x) + 4y'(x) + 5y(x) = 2e^{-x} \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = -4\lambda^2 \ . \end{cases}$$

- Determinare per quali valori di $\lambda \in I\!R$, la soluzione verifica l'ulteriore condizione $y(\pi/2) = e^{-\pi}$.

E2. Si consideri, al variare del parametro reale α, la funzione

$$f_\alpha(x) = \frac{3\alpha x + (\alpha - 1)|\sin x|^\alpha}{1 + 4x^2} \ .$$

- Per $\alpha = 1$, calcolare $\int_0^1 f_1(x)\ dx$.
- Stabilire per quali valori di α esiste finito l'integrale $\int_0^1 f_\alpha(x)\ dx$.

E3. Sia data la funzione $f : I\!R^2 \to I\!R$ definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x+1)y^3 + xy}{x^2 + y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \ , \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \ . \end{cases}$$

- Calcolare $\nabla f(0,0)$.
- Verificare che f non è continua in $(0,0)$.

D1. Sia $f \in \mathcal{C}^2(I\!R)$ una funzione assegnata ed $F : I\!R \to I\!R$ la funzione integrale definita da

$$F(x) = \int_0^x e^t f''(t)\ dt \ .$$

Stabilire se F è derivabile in $I\!R$ (giustificando la risposta) e, in caso affermativo, calcolare $F'(x)$.

D2. Sia $f : I\!R^2 \to I\!R$ una funzione di classe $\mathcal{C}^2(I\!R^2)$. Siano $P_1, P_2, P_3 \in I\!R^2$ tre punti stazionari per f. Indichiamo con $\lambda_1(P)$ e $\lambda_2(P)$ gli autovalori della matrice Hessiana di f nel punto P. Sapendo che

$$\lambda_1(P_1) \geq 0,\ \lambda_2(P_1) \geq 0 \qquad \lambda_1(P_2) > 0,\ \lambda_2(P_2) < 0 \qquad \lambda_1(P_3) < 0,\ \lambda_2(P_3) \leq 0$$

stabilire quale dei tre punti è sicuramente un punto di sella, giustificando la risposta.

Tempo: 2.30 ore