23 SETTEMBRE 2004 — SOLUZIONI COMPITO

Esercizio 1.

- L'equazione differenziale proposta è un'equazione lineare del secondo ordine a coefficienti costanti non omogenea, la cui equazione caratteristica è data da $t^2 + 4t + 5 = 0$, che ha come soluzioni $t_1 = -2 + i$ e $t_2 = -2 - i$. Pertanto, la soluzione dell'equazione omogenea associata è $y_0(x) = \mathrm{e}^{-2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$. Utilizzando il metodo di somiglianza, si ottiene che una soluzione particolare dell'equazione completa è data da $y_p(x) = \mathrm{e}^{-x}$ e, quindi, l'integrale generale dell'equazione proposta è
$$y(x) = \mathrm{e}^{-2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x) + \mathrm{e}^{-x} \ .$$
Imponendo, ora, le condizioni iniziali, si ottiene $C_1 = 0$ e $C_2 = (1 - 4\lambda^2)$, da cui la soluzione del problema di Cauchy
$$y(x) = (1 - 4\lambda^2)\ \mathrm{e}^{-2x} \sin x + \mathrm{e}^{-x} \ .$$
- Imponendo, infine, la condizione $y(\pi/2) = \mathrm{e}^{-\pi}$, si ricava l'equazione $(1 - 4\lambda^2)\ \mathrm{e}^{-\pi} + \mathrm{e}^{-\pi/2} = \mathrm{e}^{-\pi}$, che fornisce $\lambda = \pm \frac{\mathrm{e}^{\pi/4}}{2}$.

Esercizio 2.

- Osserviamo che, per $\alpha = 1$, la funzione proposta è una razionale fratta continua nell'intervallo $[0, 1]$, quindi si ricava
$$\int_0^1 f_1(x)\ dx = \int_0^1 \frac{3x}{1 + 4x^2}\ dx = \frac{3}{8} \int_0^1 \frac{8x}{1 + 4x^2}\ dx = \frac{3}{8} \log(1 + 4x^2)\Big|_0^1 = \frac{3}{8} \log 5 \ .$$
- Per $\alpha \geq 0$, la funzione proposta è continua nell'intervallo $[0, 1]$, per cui $\int_0^1 f_\alpha(x)\ dx$ esiste sempre finito, in quanto si tratta di un integrale di Riemann.
Per $\alpha < 0$, abbiamo invece a che fare con un integrale improprio, in quanto $|\sin x|^\alpha \sim x^\alpha \to +\infty$, per $x \to 0^+$. In questo caso, si ha che $f_\alpha(x) \sim (\alpha - 1)x^\alpha = (\alpha - 1)/x^{-\alpha}$. Pertanto, f_α è integrabile in senso improprio se e solo se $-\alpha < 1$, ovvero $\alpha > -1$. Quindi, in definitiva, l'integrale proposto esiste finito per $\alpha \in (-1, +\infty)$.

Esercizio 3.

- Calcoliamo, utilizzando la definizione, le due derivate parziali di f nell'origine:
$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(t, 0) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{0/t^2}{t} = 0 \ ,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(0, t) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{t^3/t^2}{t} = 1 \ ,$$
quindi $\nabla f(0, 0) = (0, 1)$.
- Per verificare che f non è continua nell'origine, basta considerare il suo comportamento lungo l'asse x e lungo la bisettrice. Nel primo caso, infatti, si ha
$$\lim_{x \to 0} f(x, 0) = 0$$
mentre, nel secondo caso, si ha
$$\lim_{x \to 0} f(x, x) = \lim_{x \to 0} \frac{(x + 1)x^3 + x^2}{2x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2} \ .$$

Domanda 1. Poiché la funzione $t \mapsto \mathrm{e}^t f''(t)$ è continua in $\mathbb{R}$, per il Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale, F è derivabile in $\mathbb{R}$ e $F'(x) = \mathrm{e}^x f''(x)$.

Domanda 2. Ricordiamo che condizione sufficiente affinché un punto stazionario sia di sella è che la matrice Hessiana sia indefinita, cioè abbia gli autovalori discordi. Poiché P_2 è l'unico dei tre punti proposti a soddisfare tale condizione, esso è anche l'unico ad essere sicuramente un punto di sella.