24 MARZO 2004 — SOLUZIONI COMPITO A

Esercizio 1.

- L'equazione differenziale proposta è a variabili separabili e soddisfa le ipotesi del teorema di esistenza e unicità in piccolo per il problema di Cauchy associato. L'equazione ha, come unica soluzione singolare, la funzione $y(x) \equiv -1$ che sarà soluzione del problema di Cauchy solo per $\lambda = -1$. Se $\lambda \neq -1$, la soluzione andrà cercata per separazione delle variabili, ovvero

$$\int \frac{1}{y+1}\, dy = \int \frac{1}{x^3}\, dx$$

da cui

$$\log|y+1| = -\frac{1}{2x^2} + C \qquad \text{ossia} \qquad y(x) = \tilde{C}\mathrm{e}^{-1/2x^2} - 1\ .$$

Imponendo la condizione iniziale, si ricava

$$y(-1) = \tilde{C}\mathrm{e}^{-1/2} - 1 = \lambda \qquad \text{ovvero} \qquad \tilde{C} = (\lambda+1)\sqrt{\mathrm{e}}\ .$$

Pertanto la soluzione richiesta è $y(x) = (\lambda+1)\sqrt{\mathrm{e}}\mathrm{e}^{-1/2x^2} - 1$.

- Calcoliamo ora

$$\lim_{x\to-\infty} y(x) = (\lambda+1)\sqrt{\mathrm{e}} - 1\ .$$

Pertanto il limite proposto sarà pari a 2 se e solo se $(\lambda+1)\sqrt{\mathrm{e}} - 1 = 2$, ovvero $\lambda = 3/\sqrt{\mathrm{e}} - 1$. Quindi l'unica soluzione del problema di Cauchy proposto che soddisfa anche la condizione limite è

$$y(x) = 3\mathrm{e}^{-1/2x^2} - 1\ .$$

Esercizio 2.

- Passando in coordinate polari, otteniamo

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{\rho\to0^+}\left[\frac{\rho^3(\cos\theta+\sin\theta)^3}{\rho} + \mathrm{e}^{\rho\cos\theta}\right] = 1 = f(0,0)\ ;$$

quindi f è continua nell'origine.

- Derivate parziali:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to0}\frac{1}{t}\left[\frac{t^3}{|t|} + \mathrm{e}^t - 1\right]\lim_{t\to0}\left[\frac{t^2}{|t|} + \frac{\mathrm{e}^t-1}{t}\right] = 1\ ;$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{t\to0}\frac{1}{t}\left[\frac{t^3}{|t|} + 1 - 1\right]\lim_{t\to0}\frac{t^2}{|t|} = 0\ .$$

Quindi si ha anche $\nabla f(0,0) = (1,0)$.

- Per quanto riguarda la differenziabilità, facendo prima uno sviluppo di Taylor al secondo ordine per la funzione $x \mapsto \mathrm{e}^x$ e poi passando in coordinate polari, si ottiene

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}}\left[\frac{(h+k)^3}{\sqrt{h^2+k^2}} + \mathrm{e}^h - 1 - h\right] = \lim_{(h,k)\to(0,0)}\left[\frac{(h+k)^3}{h^2+k^2} + \frac{1+h+h^2/2-1-h}{\sqrt{h^2+k^2}}\right]$$
$$= \lim_{(h,k)\to(0,0)}\left[\frac{(h+k)^3}{h^2+k^2} + \frac{h^2}{2\sqrt{h^2+k^2}}\right] = \lim_{\rho\to0^+}\left[\frac{\rho^3(\cos\theta+\sin\theta)^3}{\rho^2} + \frac{\rho^2\cos^2\theta}{2\rho}\right] = 0\ ,$$

quindi f è differenziabile nell'origine.

Esercizio 3. Effettuando la sostituzione $t = \log x$, da cui $dt = \frac{1}{x}\,dx$, $t(1) = 0$ e $t(\sqrt{\mathrm{e}}) = 1/2$, si ricava

$$\int_0^{\sqrt{\mathrm{e}}} \frac{\log x}{x(\log^2 x + 2\log x - 3)}\, dx = \int_0^{1/2}\frac{t}{t^2+2t-3}\, dt = \int_0^{1/2}\frac{t}{(t+3)(t-1)}\, dt$$
$$= \frac{3}{4}\int_0^{1/2}\frac{1}{t+3}\, dt + \frac{1}{4}\int_0^{1/2}\frac{1}{t-1}\, dt = \left[\frac{3}{4}\log|t+3| + \frac{1}{4}\log|t-1|\right]\Big|_0^{1/2} = \log\sqrt[4]{\frac{343}{432}}\ .$$

Domanda 1. Applicando il Teorema fondamentale del Calcolo Integrale (o Teorema di Torricelli), si ottiene che $F \in \mathcal{C}^1(I\!\!R)$ e $F'(x) = x^2 f(x) \geq 0$, per ogni $x \in I\!\!R$. Quindi, poiché F ha la derivata prima non negativa, essa è crescente in $I\!\!R$.

Domanda 2. Poiché $\nabla f(x, y) = (2x + \mathrm{e}^x - 1, 4y^3)$, si ha che $\nabla f(0, 0) = (0, 0)$, quindi l'origine è punto stazionario per f. Inoltre,

$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \,,$$

cioè la matrice Hessiana nell'origine è semidefinita positiva e questa è condizione necessaria (ma in generale non sufficiente) affinché $(0, 0)$ sia punto di minimo.

24 MARZO 2004 — SOLUZIONI COMPITO B

Esercizio 1.

- L'equazione differenziale proposta è a variabili separabili e soddisfa le ipotesi del teorema di esistenza e unicità in piccolo per il problema di Cauchy associato. L'equazione ha, come unica soluzione singolare, la funzione $y(x) \equiv 1$ che sarà soluzione del problema di Cauchy solo per $\lambda = 1$. Se $\lambda \neq 1$, la soluzione andrà cercata per separazione delle variabili, ovvero

$$\int \frac{1}{y-1}\,dy = \int \frac{1}{x^3}\,dx$$

da cui

$$\log|y-1| = -\frac{1}{2x^2} + C \qquad \text{ossia} \qquad y(x) = \tilde{C}\mathrm{e}^{-1/2x^2} + 1 \ .$$

Imponendo la condizione iniziale, si ricava

$$y(1) = \tilde{C}\mathrm{e}^{-1/2} + 1 = \lambda \qquad \text{ovvero} \qquad \tilde{C} = (\lambda-1)\sqrt{\mathrm{e}} \ .$$

Pertanto la soluzione richiesta è $y(x) = (\lambda-1)\sqrt{\mathrm{e}}\mathrm{e}^{-1/2x^2} + 1$.

- Calcoliamo ora

$$\lim_{x\to+\infty} y(x) = (\lambda-1)\sqrt{\mathrm{e}} + 1 \ .$$

Pertanto il limite proposto sarà pari a 2 se e solo se $(\lambda-1)\sqrt{\mathrm{e}} + 1 = 3$, ovvero $\lambda = 2/\sqrt{\mathrm{e}} + 1$. Quindi l'unica soluzione del problema di Cauchy proposto che soddisfa anche la condizione limite è

$$y(x) = 2\mathrm{e}^{-1/2x^2} + 1 \ .$$

Esercizio 2.

- Passando in coordinate polari, otteniamo

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{\rho\to0^+}\left[\frac{\rho^3(\cos\theta + 3\sin\theta)^3}{\rho} + \log(1+\rho^2\sin^2\theta)\right] = 0 = f(0,0) \ ;$$

quindi f è continua nell'origine.

- Derivate parziali:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to0}\frac{1}{t}\left[\frac{t^3}{|t|}\right] = \lim_{t\to0}\frac{t^2}{|t|} = 0 \ ;$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{t\to0}\frac{1}{t}\left[\frac{27t^3}{|t|} + \log(1+t^2)\right]\lim_{t\to0}\left[\frac{27t^2}{|t|} + \frac{\log(1+t^2)}{t}\right] = 0 \ .$$

Quindi si ha anche $\nabla f(0,0) = (0,0)$.

- Per quanto riguarda la differenziabilità, facendo prima uno sviluppo di Taylor al primo ordine per la funzione $t \mapsto \log(1+t)$, con $t = k^2$, e poi passando in coordinate polari, si ottiene

$$\begin{aligned}\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}}\left[\frac{(h+3k)^3}{\sqrt{h^2+k^2}} + \log(1+k^2)\right] &= \lim_{(h,k)\to(0,0)}\left[\frac{(h+3k)^3}{h^2+k^2} + \frac{k^2}{\sqrt{h^2+k^2}}\right] \\ &= \lim_{\rho\to0^+}\left[\frac{\rho^3(\cos\theta+3\sin\theta)^3}{\rho^2} + \frac{\rho^2\sin^2\theta}{\rho}\right] = 0 \ ,\end{aligned}$$

quindi f è differenziabile nell'origine.

Esercizio 3. Effettuando la sostituzione $t = \mathrm{e}^x$, da cui $dt = \mathrm{e}^x\ dx$, $t(0) = 1$ e $t(\log 2) = 2$, si ricava

$$\int_0^{\log 2} \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x} - 2\mathrm{e}^x - 3}\ dx = \int_1^2 \frac{1}{t^2 - 2t - 3}\ dt = \int_1^2 \frac{1}{(t-3)(t+1)}\ dt$$
$$= \frac{1}{4}\int_1^2 \frac{1}{t-3}\ dt - \frac{1}{4}\int_1^2 \frac{1}{t+1}\ dt = \left[\frac{1}{4}\log|t-3| - \frac{1}{4}\log|t+1|\right]\Big|_1^2 = -\log\sqrt[4]{3}\ .$$

Domanda 1. Applicando il Teorema fondamentale del Calcolo Integrale (o Teorema di Torricelli), si ottiene che $F \in \mathcal{C}^1(I\!R)$ e $F'(x) = \mathrm{e}^x f'(x) < 0$, per ogni $x \in I\!R$. Quindi, poiché F ha la derivata prima negativa, essa è decrescente in $I\!R$.

Domanda 2. Poiché $\nabla f(x,y) = (2x, -6y + 2\mathrm{e}^{2y} - 2)$, si ha che $\nabla f(0,0) = (0,0)$, quindi l'origine è punto stazionario per f. Inoltre,

$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\ ,$$

cioè la matrice Hessiana nell'origine è indefinita e questa è condizione sufficiente affinché $(0,0)$ sia punto di sella.