SOLUZIONI

E1

Ponendo $z - 2i = w$, si ottiene $w = \sqrt[5]{\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right)}$, ovvero

$$w_1 = \cos\frac{\pi}{30} + i\sin\frac{\pi}{30} \qquad w_2 = \cos\frac{13\pi}{30} + i\sin\frac{13\pi}{30} \qquad w_3 = \cos\frac{25\pi}{30} + i\sin\frac{25\pi}{30}$$
$$w_4 = \cos\frac{37\pi}{30} + i\sin\frac{37\pi}{30} \qquad w_5 = \cos\frac{49\pi}{30} + i\sin\frac{49\pi}{30}\ .$$

Pertanto le soluzioni richieste sono

$$z_1 = \cos\frac{\pi}{30} + i\left(2 + \sin\frac{\pi}{30}\right) \qquad z_2 = \cos\frac{13\pi}{30} + i\left(2 + \sin\frac{13\pi}{30}\right) \qquad z_3 = \cos\frac{25\pi}{30} + i\left(2 + \sin\frac{25\pi}{30}\right)$$
$$z_4 = \cos\frac{37\pi}{30} + i\left(2 + \sin\frac{37\pi}{30}\right) \qquad z_5 = \cos\frac{49\pi}{30} + i\left(2 + \sin\frac{49\pi}{30}\right)\ .$$

E2

Osservando che $\log(\mathrm{e}x) = \log\mathrm{e} + \log x = 1 + \log x$ ed effettuando il cambiamento di coordinate $y = \log x$, da cui $dy = \frac{1}{x}\ dx$, si ottiene

$$\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\log x}{\log(\mathrm{e}x)}\ \frac{1}{x}\ dx = \int_0^1 \frac{y}{1+y}\ dy = \int_0^1 1\ dy - \int_0^1 \frac{1}{1+y}\ dy = [y - \log(1+y)]\Big|_0^1 = 1 - \log 2\ .$$

E3

Ricordando che

$$(1 - \cos\epsilon_n) \sim \frac{1}{2}\epsilon_n^2 \qquad\qquad \text{per} \quad \epsilon_n \to 0$$

e ponendo $\epsilon_n = \log n/n$, si ottiene

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^3\left(1 - \cos\frac{\log n}{n}\right)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^3\frac{\log^2 n}{2n^2}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{n\log^2 n} = 0\ .$$

E4

Ricordando le regole di derivazione delle funzioni composte, si ottiene

$$f'(x) = 2\sin x\cos x \mathrm{e}^{\sin^2 x}\ .$$

E5

C.E. $= (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$; $\quad f(x) > 0 \;\; \forall\, x \in$ C.E. ;

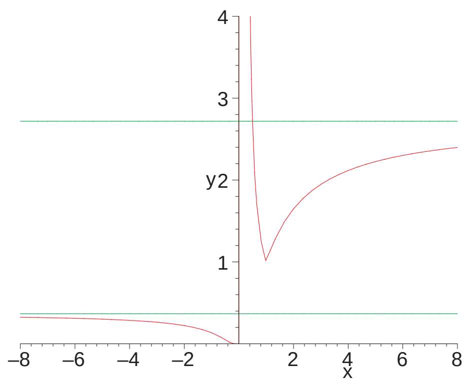
$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1/\mathrm{e}$; $\quad \lim_{x\to 0^-} f(x) = 0$; $\quad \lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$; $\quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \mathrm{e}$;

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{\frac{x-1}{x}} & \text{se } x > 1 \\ -\frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{\frac{1-x}{x}} & \text{se } x < 0\ ,\ 0 < x < 1 \end{cases} ;$$

$f'(x) > 0 \;\; \forall\, x > 1$; $\quad f'(x) < 0 \;\; \forall\, x < 0\ ,\ 0 < x < 1$; $\quad \lim_{x\to 0^-} f'(x) = 0$; $\quad \lim_{x\to 1^\pm} f'(x) = \pm 2$;

$$f''(x) = \begin{cases} \left(\frac{1}{x^4} - \frac{2}{x^3}\right)\mathrm{e}^{\frac{x-1}{x}} & \text{se } x > 1 \\ \left(\frac{1}{x^4} + \frac{2}{x^3}\right)\mathrm{e}^{\frac{1-x}{x}} & \text{se } x < 0\ ,\ 0 < x < 1 \end{cases} ;$$

$f''(x) > 0 \; \forall \; -1/2 < x < 0\ ,\ 0 < x < 1$; $\quad f''(x) < 0 \; \forall\; x < -1/2\ ,\ x > 1$; $\quad f''(x) = 0\ ,\ x = -1/2$.



La funzione assegnata ha asintoto orizzontale $y = 1/e$, per $x \to -\infty$, ha asintoto orizzontale $y = e$, per $x \to +\infty$, ha asintoto verticale in $x = 0$. Inoltre ha un punto angoloso in $x = 1$ ed un punto di flesso in $x = -1/2$.

E6

Ponendo $a_n = \frac{2+n^2\log n}{n^\alpha}$, lo studio della convergenza assoluta della serie proposta coincide con lo studio della convergenza della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$. Poiché, inoltre, $a_n \sim (n^2 \log n)/n^\alpha = n^{2-\alpha}\log n$, per il criterio del confronto asintotico, si ottiene che la serie proposta converge se $\alpha > 3$, mentre diverge se $\alpha \le 3$.

Per quanto riguarda, invece, la convergenza semplice, notiamo che $a_n \to 0$, se e solo se $\alpha > 2$. In tal caso, ponendo $f(x) = \frac{2+x^2\log x}{x^\alpha} = \frac{2}{x^\alpha} + \frac{x^2\log x}{x^\alpha} =: f_1(x) + f_2(x)$, osserviamo che f_1 è monotona decrescente e

$$f_2'(x) = \frac{-\alpha x^{\alpha+1}\log x + x^{\alpha+1} + 2x^\alpha \log x}{x^{2\alpha}} \sim -\frac{\alpha \log x}{x^{\alpha-1}} < 0 \qquad \text{per} \;\; x \to +\infty \ ,$$

cioè anche f_2 è monotona decrescente, almeno per valori grandi di x. Pertanto, si ottiene che a_n è definitivamente monotona decrescente, in quanto lo è la funzione ad essa associata, e quindi dal criterio di Leibniz la serie proposta converge semplicemente per $\alpha > 2$.

E7
Osserviamo che la funzione integranda va studiata in un intorno di $+\infty$ ed in un intorno di 2. Nel primo caso, $f(x) \sim 1/x^3$, che è impropriamente integrabile all'infinito; nel secondo caso $f(x) \sim \frac{1}{18\sqrt{|x-2|}}$, che è impropriamente integrabile in un intorno di $x = 2$, pertanto l'integrale proposto esiste finito.

D1
Poiché $\mathrm{e}^{-x} \to 0$ per $x \to +\infty$ e $\sin x$ non ammette limite per $x \to +\infty$, si ha che il limite proposto non esiste.

D2
La funzione proposta è derivabile poichè è la composizione della funzione integrale $F(y) = \int_2^y \log(1+t^2)\ dt$, che è derivabile per il II^0 Teorema fondamentale del calcolo integrale, in quanto la funzione integranda è continua, e della funzione lineare $g(x) = 4x$, che è ovviamente derivabile. La derivata richiesta, pertanto, è

$$F'(x) = 4\log(1+16x^2)\ .$$

D3
Dalla formula di Taylor generale, si ha che

$$f(x) = f(2) + \frac{f'(2)}{1!}(x-2) + \frac{f''(2)}{2!}(x-2)^2 + o\Big((x-2)^2\Big)\ .$$

Inoltre

$$f(2) = -1 \qquad f'(2) = -\frac{\pi}{2}\sin\pi = 0 \qquad f''(2) = -\frac{\pi^2}{4}\cos\pi = \frac{\pi^2}{4}$$

da cui segue

$$f(x) = -1 + \frac{\pi^2}{8}(x-2)^2 + o\Big((x-2)^2\Big)\ .$$