SOLUZIONI COMPITO A

Esercizio 1

Il problema di Cauchy proposto è associato ad un'equazione lineare del secondo ordine a coefficienti costanti, la cui equazione caratteristica è data $\lambda^2 + 6\lambda + 5 = 0$, che ha come soluzioni $\lambda = -1$ e $\lambda = -5$. Pertanto, l'integrale generale dell'equazione omogenea sarà dato da $y_0(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-5x}$. Tenendo conto che il termine noto si può riscrivere nella forma $2\sinh x = e^x - e^{-x}$, la soluzione particolare si può ottenere applicando il principio di sovrapposizione e il metodo di somiglianza, da cui

$$y^p(x) = y_1^p(x) + y_2^p(x) \qquad \text{dove} \qquad y_p^1(x) = A e^x \qquad \text{e} \qquad y_p^2(x) = Bx e^{-x}\,.$$

Sostituendo nell'equazione si ricava $A = 1/12$ e $B = -1/4$, da cui si ottiene che l'integrale generale dell'equazione completa è dato da $y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-5x} + \frac{1}{12} e^x - \frac{1}{4} x e^{-x}$. Imponendo le condizioni iniziali, si giunge al sistema

$$\begin{cases} C_1 + C_2 + \dfrac{1}{12} = -\dfrac{1}{12} \\ -C_1 - 5C_2 + \dfrac{1}{12} - \dfrac{1}{4} = 0 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} -4C_2 - \dfrac{1}{12} = -\dfrac{1}{12} \\ -C_1 - 5C_2 - \dfrac{1}{6} = 0 \end{cases}$$

che ha come soluzioni $C_1 = -1/6$ e $C_2 = 0$.
Pertanto la soluzione cercata sarà data da $y(x) = -\frac{1}{6} e^{-x} + \frac{1}{12} e^x - \frac{1}{4} x e^{-x}$.

Esercizio 2

Utilizzando un cambiamento in coordinate polari, centrate nel punto $(0, 1)$, calcoliamo

$$\lim_{\substack{x \to 0^+ \\ y \to 1}} \frac{x^2 y}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1 - 2y}} = \lim_{\substack{\rho \to 0^+ \\ -\pi/2 < \theta < \pi/2}} \frac{(1 + \rho \sin\theta)\rho^2 \cos^2\theta}{\rho} = 0$$

indipendentemente da θ. D'altra parte

$$f(0, 1) = (3x + \alpha y^2)\Big|_{(0,1)} = \alpha\,.$$

Quindi la funzione proposta sarà continua nel punto $(0, 1)$ se e solo se $\alpha = 0$.

Esercizio 3

Poiché l'insieme di integrazione è un insieme y-semplice, dal Teorema di Riduzione per gli integrali doppi si ricava

$$\begin{aligned} \iint_E xy\, e^{y^2}\, dxdy &= \int_0^2 x \left(\int_0^x y e^{y^2}\, dy \right) dx = \frac{1}{2} \int_0^2 x \left(e^{y^2} \Big|_0^x \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^2 x(e^{x^2} - 1)\, dx = \frac{1}{4}(e^{x^2} - x^2)\Big|_0^2 = \frac{1}{4}(e^4 - 5)\,. \end{aligned}$$

Domanda 1

Utilizzando il II Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale ed il Teorema di Derivazione della Funzione Composta si ottiene

$$F'(x) = g\big(h(x)\big)\, h'(x)$$

da cui $F'(1) = g\big(h(1)\big)\, h'(1) = g(0)\, h'(1) = 4$, dove si è tenuto conto che $h(1) = 0$, $g(0) = 2$ e $h'(1) = 2$.

SOLUZIONI COMPITO B

Esercizio 1

Il problema di Cauchy proposto è associato ad un'equazione lineare del secondo ordine a coefficienti costanti, la cui equazione caratteristica è data $\lambda^2 + 3\lambda - 4 = 0$, che ha come soluzioni $\lambda = 1$ e $\lambda = -4$. Pertanto, l'integrale generale dell'equazione omogenea sarà dato da $y_0(x) = C_1 \mathrm{e}^x + C_2 \mathrm{e}^{-4x}$. Tenendo conto che il termine noto si può riscrivere nella forma $2\cosh x = \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}$, la soluzione particolare si può ottenere applicando il principio di sovrapposizione e il metodo di somiglianza, da cui

$$y^p(x) = y_1^p(x) + y_2^p(x) \qquad \text{dove} \qquad y_p^1(x) = Ax\mathrm{e}^x \qquad \text{e} \qquad y_p^2(x) = B\mathrm{e}^{-x}\,.$$

Sostituendo nell'equazione si ricava $A = 1/5$ e $B = -1/6$, da cui si ottiene che l'integrale generale dell'equazione completa è dato da $y(x) = C_1\mathrm{e}^x + C_2\mathrm{e}^{-4x} + \frac{1}{5}x\mathrm{e}^x - \frac{1}{6}\mathrm{e}^{-x}$. Imponendo le condizioni iniziali, si giunge al sistema

$$\begin{cases} C_1 + C_2 - \dfrac{1}{6} = -\dfrac{8}{15} \\ C_1 - 4C_2 + \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{6} = 0 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} 5C_2 - \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{5} = -\dfrac{8}{15} \\ C_1 - 4C_2 + \dfrac{11}{30} = 0 \end{cases}$$

che ha come soluzioni $C_1 = -11/30$ e $C_2 = 0$.
Pertanto la soluzione cercata sarà data da $y(x) = -\frac{11}{30}\mathrm{e}^x + \frac{1}{5}x\mathrm{e}^x - \frac{1}{6}\mathrm{e}^{-x}$.

Esercizio 2

Utilizzando un cambiamento in coordinate polari, centrate nel punto $(1,0)$, calcoliamo

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 0^-}} \frac{xy^2}{\sqrt{x^2+y^2+1-2x}} = \lim_{\substack{\rho\to 0+\\ \pi<\theta<2\pi}} \frac{(1+\rho\cos\theta)\rho^2\sin^2\theta}{\rho} = 0$$

indipendentemente da θ. D'altra parte

$$f(1,0) = ((3\alpha-1)x + y^2)\Big|_{(1,0)} = 3\alpha - 1\,.$$

Quindi la funzione proposta sarà continua nel punto $(1,0)$ se e solo se $\alpha = 1/3$.

Esercizio 3

Poiché l'insieme di integrazione è un insieme x-semplice, dal Teorema di Riduzione per gli integrali doppi si ricava

$$\iint_E xy\,\cosh x^2\,dxdy = \int_{-1}^0 y\left(\int_0^{-y} x\cosh x^2\,dx\right)\,dy = \frac{1}{2}\int_{-1}^0 y\left(\sinh x^2\Big|_0^{-y}\right)\,dy$$
$$= \frac{1}{2}\int_{-1}^0 y\,\sinh y^2\,dy = \frac{1}{4}\cosh y^2\Big|_{-1}^0 = \frac{1}{4}(1-\cosh 1)\,.$$

Domanda 1

Utilizzando il II Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale ed il Teorema di Derivazione della Funzione Composta si ottiene

$$F'(x) = h\big(g(x)\big)\,g'(x)$$

da cui $F'(0) = h\big(g(0)\big)\,g'(0) = h(2)\,g'(0) = 3$, dove si è tenuto conto che $g(0) = 2$, $h(2) = 3$ e $g'(0) = 1$.

SOLUZIONI COMPITO C

Esercizio 1

Il problema di Cauchy proposto è associato ad un'equazione lineare del secondo ordine a coefficienti costanti, la cui equazione caratteristica è data $\lambda^2 + 3\lambda - 4 = 0$, che ha come soluzioni $\lambda = 1$ e $\lambda = -4$. Pertanto, l'integrale generale dell'equazione omogenea sarà dato da $y_0(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-4x}$. Tenendo conto che il termine noto si può riscrivere nella forma $8\cosh(4x) = 4(e^{4x} + e^{-4x})$, la soluzione particolare si può ottenere applicando il principio di sovrapposizione e il metodo di somiglianza, da cui

$$y^p(x) = y_1^p(x) + y_2^p(x) \qquad \text{dove} \qquad y_p^1(x) = Ae^{4x} \qquad \text{e} \qquad y_p^2(x) = Bxe^{-4x}\,.$$

Sostituendo nell'equazione si ricava $A = 1/6$ e $B = -4/5$, da cui si ottiene che l'integrale generale dell'equazione completa è dato da $y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-4x} + \frac{1}{6}e^{4x} - \frac{4}{5}xe^{-4x}$. Imponendo le condizioni iniziali, si giunge al sistema

$$\begin{cases} C_1 + C_2 + \dfrac{1}{6} = \dfrac{3}{10} \\ C_1 - 4C_2 + \dfrac{2}{3} - \dfrac{4}{5} = 0 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} 5C_2 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{4}{5} = \dfrac{3}{10} \\ C_1 - 4C_2 - \dfrac{2}{15} = 0 \end{cases}$$

che ha come soluzioni $C_1 = 2/15$ e $C_2 = 0$.
Pertanto la soluzione cercata sarà data da $y(x) = \frac{2}{15}e^x + \frac{1}{6}e^{4x} - \frac{4}{5}xe^{-4x}$.

Esercizio 2

Utilizzando un cambiamento in coordinate polari, centrate nel punto $(0, -1)$, calcoliamo

$$\lim_{\substack{x\to 0^+ \\ y\to -1}} \frac{(x+1)(y+1)^2}{\sqrt{x^2+y^2+1+2y}} = \lim_{\substack{\rho\to 0^+ \\ -\pi/2<\theta<\pi/2}} \frac{(1+\rho\cos\theta)\rho^2\sin^2\theta}{\rho} = 0$$

indipendentemente da θ. D'altra parte

$$f(0,-1) = (x^2 + (2\alpha - 1)y)\Big|_{(0,-1)} = -(2\alpha - 1)\,.$$

Quindi la funzione proposta sarà continua nel punto $(0, -1)$ se e solo se $\alpha = 1/2$.

Esercizio 3

Poiché l'insieme di integrazione è un insieme y-semplice, dal Teorema di Riduzione per gli integrali doppi si ricava

$$\iint_E xy\,\cosh y^2\; dxdy = \int_0^1 x\left(\int_{-x}^0 y\cosh y^2\; dy\right)\, dx = \frac{1}{2}\int_0^1 x\left(\sinh y^2\Big|_{-x}^0\right)\, dx$$
$$= -\frac{1}{2}\int_0^1 x\,\sinh x^2\; dx = -\frac{1}{4}\cosh x^2\Big|_0^1 = \frac{1}{4}(1 - \cosh 1)\,.$$

Domanda 1

Utilizzando il II Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale ed il Teorema di Derivazione della Funzione Composta si ottiene

$$F'(x) = h\big(g(x)\big)\, g'(x)$$

da cui $F'(1) = h\big(g(1)\big)\, g'(1) = h(4)\, g'(1) = 2$, dove si è tenuto conto che $g(1) = 4$, $h(4) = 1$ e $g'(1) = 2$.

SOLUZIONI COMPITO D

Esercizio 1

Il problema di Cauchy proposto è associato ad un'equazione lineare del secondo ordine a coefficienti costanti, la cui equazione caratteristica è data $\lambda^2 + 6\lambda + 5 = 0$, che ha come soluzioni $\lambda = -1$ e $\lambda = -5$. Pertanto, l'integrale generale dell'equazione omogenea sarà dato da $y_0(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-5x}$. Tenendo conto che il termine noto si può riscrivere nella forma $8\sinh(5x) = 4(e^{5x} - e^{-5x})$, la soluzione particolare si può ottenere applicando il principio di sovrapposizione e il metodo di somiglianza, da cui

$$y^p(x) = y_1^p(x) + y_2^p(x) \qquad \text{dove} \qquad y_p^1(x) = Ae^{5x} \qquad \text{e} \qquad y_p^2(x) = Bxe^{-5x}\,.$$

Sostituendo nell'equazione si ricava $A = 1/15$ e $B = 1$, da cui si ottiene che l'integrale generale dell'equazione completa è dato da $y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-5x} + \frac{1}{15}e^{5x} + xe^{-5x}$. Imponendo le condizioni iniziali, si giunge al sistema

$$\begin{cases} C_1 + C_2 + \dfrac{1}{15} = \dfrac{7}{5} \\ -C_1 - 5C_2 + \dfrac{1}{3} + 1 = 0 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} -4C_2 + \dfrac{2}{5} + 1 = \dfrac{7}{5} \\ -C_1 - 5C_2 + \dfrac{4}{3} = 0 \end{cases}$$

che ha come soluzioni $C_1 = 4/3$ e $C_2 = 0$.
Pertanto la soluzione cercata sarà data da $y(x) = \frac{4}{3}e^{-x} + \frac{1}{15}e^{5x} + xe^{-5x}$.

Esercizio 2

Utilizzando un cambiamento in coordinate polari, centrate nel punto $(-1,0)$, calcoliamo

$$\lim_{\substack{x\to -1\\ y\to 0^-}} \frac{(x+1)^2(y+1)}{\sqrt{x^2+y^2+1+2x}} = \lim_{\substack{\rho\to 0^+\\ \pi<\theta<2\pi}} \frac{\rho^2\cos^2\theta(1+\rho\sin\theta)}{\rho} = 0$$

indipendentemente da θ. D'altra parte

$$f(-1,0) = (3(\alpha+1)x + y)\Big|_{(-1,0)} = -3(\alpha+1)\,.$$

Quindi la funzione proposta sarà continua nel punto $(-1,0)$ se e solo se $\alpha = -1$.

Esercizio 3

Poiché l'insieme di integrazione è un insieme x-semplice, dal Teorema di Riduzione per gli integrali doppi si ricava

$$\begin{aligned}\iint_E xy\,e^{x^2}\,dxdy &= \int_0^2 y\left(\int_0^y xe^{x^2}\,dx\right)dy = \frac{1}{2}\int_0^2 y\left(e^{x^2}\Big|_0^y\right)dy \\ &= \frac{1}{2}\int_0^2 y(e^{y^2}-1)\,dx = \frac{1}{4}(e^{y^2}-y^2)\Big|_0^2 = \frac{1}{4}(e^4-5)\,.\end{aligned}$$

Domanda 1

Utilizzando il II Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale ed il Teorema di Derivazione della Funzione Composta si ottiene

$$F'(x) = g\big(h(x)\big)\,h'(x)$$

da cui $F'(0) = g\big(h(0)\big)\,h'(0) = g(1)\,h'(0) = 6$, dove si è tenuto conto che $h(0) = 1$, $g(1) = 3$ e $h'(0) = 2$.