SOLUZIONI COMPITO del 27/01/2009
ANALISI 1 - INFORMATICA 12 CFU + AUTOMATICA 5+5 CFU
ANLISI 1 (I MODULO) - INFORMATICA + AUTOMATICA 5 CFU

TEMA A

Esercizio 1
Osserviamo che $e^4 = e^4 e^{i0}$, pertanto, ponendo $z = a + ib$, l'equazione proposta si trasforma nel sistema

$$\begin{cases} a = 0 + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}, \qquad \text{e} \qquad |a| < 1\,; \\ \sqrt{a^2+b^2} = 4\,; \end{cases}$$

le cui soluzioni sono date da $a = 0$ e $|b| = 4$, ovvero $b = \pm 4$. Quindi, le soluzioni cercate sono $z_{1,2} = \pm 4i$.

Esercizio 2
Utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al primo ordine per la funzione $x \mapsto \arcsin x$ e quello al secondo ordine per la funzione $t \mapsto \sin t$, con $t = 3x^2 + 4x^4$, e per la funzione $t \mapsto \log(1+t)$, con $t = 3x^2$, otteniamo

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(3x^2+4x^4) - \log(1+3x^2)}{(\arcsin x)^4} = \lim_{x\to 0^+} \frac{3x^2+4x^4-3x^2+9x^4/2}{x^4} = \lim_{x\to 0^+} \frac{17x^4}{2x^4} = 17/2\,.$$

Esercizio 3
Per determinare gli estremanti della funzione assegnata $f(x) = -3e^{3x} + 2e^x$, studiamo la sua monotonia tramite il segno della derivata che è data da $f'(x) = -9e^{3x} + 2e^x$. Ponendo $e^x = t$, ci riconduciamo a studiare il segno del polinomio $p(t) = -9t^3 + 2t = t(-9t^2+2)$, che risulta essere positivo per $t < -\sqrt{2}/3$ e $0 < t < \sqrt{2}/3$ e negativo per $-\sqrt{2}/3 < t < 0$ e $t > \sqrt{2}/3$. Risolvendo rispetto alla variabile originaria x, si ottiene che f è crescente per $x < \log(\sqrt{2}/3)$ e decrescente per $x > \log(\sqrt{2}/3)$. Quindi in $(-\infty, \log\sqrt{2/3}]$, tenendo conto che

$$\log(\sqrt{2}/3) < \log\sqrt{2/3}\,, \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0\,, \qquad f(\log\sqrt{2/3}) = 0\,,$$

si ricava che $x = \log(\sqrt{2}/3)$ è punto di massimo assoluto per f, mentre $x = \log\sqrt{2/3}$ è punto di minimo assoluto per f.

Domanda 1
L'unica risposta corretta è la *b*), infatti dall'algebra dei limiti si ottiene che $0^{+\infty} = 0$. Per contraddire le affermazioni *a*), *c*) e *d*) basta prendere $a_n = 1/\sqrt[3]{n}$.

Esercizio 4
Effettuando la sostituzione in coordinate polari centrate nell'origine $x = r\cos\theta$ e $y = r\sin\theta$, da cui $dx\,dy = r\,dr\,d\theta$ ed $\tilde{E} = \{(r,\theta)\ :\ 1 \le r \le e^\pi,\ \pi/4 \le \theta \le \pi/2\}$, si ottiene

$$\iint_E \frac{x^2 \sin\left(\log\sqrt{x^2+y^2}\right)}{y^2(x^2+y^2)}\,dx\,dy = \iint_{\tilde{E}} \frac{r^2\cos^2\theta \sin\left(\log\sqrt{r^2}\right)}{r^2\sin^2\theta \cdot r^2}\, r\,dr\,d\theta$$
$$= \left(\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}\,d\theta\right)\left(\int_1^{e^\pi} \frac{\sin(\log r)}{r}\,dr\right) = \left(\int_{\pi/4}^{\pi/2} \left[\frac{1}{\sin^2\theta} - 1\right] d\theta\right)\left(-\cos(\log r)\Big|_1^{e^\pi}\right)$$
$$= \left(-\cot\theta\Big|_{\pi/4}^{\pi/2} - \pi/4\right)(1-(-1)) = 2(1-\pi/4)\,.$$

Esercizio 5 Poiché E è un insieme chiuso e limitato ed f è una funzione continua, per il Teorema di Weierstrass, esistono almeno un punto di minimo assoluto ed un punto di massimo assoluto per f nell'insieme E. Poiché f è un polinomio, esso è di classe $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$, quindi per determinare i suoi estremanti all'interno di E possiamo utilizzare i metodi del calcolo differenziale. Cominciamo determinando i punti stazionari, cioè i punti che annullano il gradiente:

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 10x + 3y = 0 \\ f_y(x,y) = 12y^2 + 3x = 0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x = -\dfrac{3}{10}y \\ y(40y-3) = 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} y = \dfrac{3}{40} \\ x = -\dfrac{9}{400} \end{cases}$$

ovvero ha come soluzioni i punti $P_1 = (0,0)$, $P_2 = (-\frac{9}{400}, \frac{3}{40})$, nessuno dei quali appartiene all'interno di E. Quindi non ci sono estremanti interni ad E. Studiamo pertanto la sua frontiera.

- **Lato** $a = \{0 \le x \le 1\,,\, y = 0\}$ Osserviamo che $f(x,0) = 5x^2 - 7$, quindi è crescente in $[0,1]$; pertanto, $(0,0)$ è punto di minimo vincolato al lato a, mentre $(1,0)$ è punto di massimo vincolato al lato a.
- **Lato** $b = \{0 \le y \le 1\,,\, x = 1\}$ Osserviamo che $f(1,y) = 5 + 4y^3 + 3y - 7 =: g_1(y)$, da cui $g_1'(y) = 12y^2 + 3 \ge 0$. Quindi g_1 è crescente in $[0,1]$; pertanto, $(1,0)$ è punto di minimo vincolato al lato b, mentre $(1,1)$ è punto di massimo vincolato al lato b.
- **Lato** $c = \{0 \le x \le 1\,,\, x = y\}$ Osserviamo che $f(x,x) = 4x^3 + 8x^2 - 7 =: g_2(x)$, da cui $g_2'(x) = 12x^2 + 16x \ge 0$ in $[0,1]$. Quindi g_2 è crescente in $[0,1]$; pertanto, $(0,0)$ è punto di minimo vincolato al lato c, mentre $(1,1)$ è punto di massimo vincolato al lato c.

Dall'analisi effettuata, risulta che l'unico candidato minimo assoluto per f in E è il punto $(0,0)$, mentre l'unico candidato massimo assoluto per f in E è il punto $(1,1)$. Visto che, come affermato all'inizio, il teorema di Weierstrass ne assicura l'esistenza, avremo che effettivamente $(0,0)$ è punto di minimo assoluto per f in E e $(1,1)$ è punto di massimo assoluto per f in E. Non essendoci altri candidati, la funzione non ammette altri punti di estremo relativo.

Esercizio 6

Il problema di Cauchy proposto è associato ad un'equazione differenziale lineare del primo ordine non omogenea, il cui coefficiente e termine noto sono definiti e continui in $(-\infty,0) \cup (0,+\infty)$. Tenendo conto della condizione iniziale, assegnata in $x = 1$, considereremo l'intervallo $(0,+\infty)$. Per determinare la soluzione del problema utilizziamo la formula risolutiva, dopo aver calcolato gli integrali necessari, cioè:

$$\int_1^x \frac{1}{t^2}\,dt = 1 - \frac{1}{x}$$

$$\int_1^x 3t\mathrm{e}^{t^2-1/t}\,\mathrm{e}^{1/t-1}\,dt = \frac{3}{\mathrm{e}}\int_1^x t\mathrm{e}^{t^2}\,dt = \frac{3}{2\mathrm{e}}(\mathrm{e}^{x^2} - \mathrm{e})\,.$$

A questo punto la soluzione del problema di Cauchy sarà:

$$y(x) = \mathrm{e}^{\int_1^x 1/t^2\,dt}\left(\frac{3}{2} + \int_1^x 3t\mathrm{e}^{t^2-1/t}\mathrm{e}^{1/t-1}\,dt\right) = \mathrm{e}^{1-1/x}\left[\frac{3}{2} + \frac{3}{2\mathrm{e}}(\mathrm{e}^{x^2} - \mathrm{e})\right] = \mathrm{e}^{-1/x}\left[\frac{3\mathrm{e}}{2} + \frac{3}{2}(\mathrm{e}^{x^2} - \mathrm{e})\right].$$

Poiché $\lim_{x\to0^+} y(x) = \lim_{x\to0^+} \mathrm{e}^{-1/x}\left[\frac{3\mathrm{e}}{2} + \frac{3}{2}(\mathrm{e}^{x^2} - \mathrm{e})\right] = 0$, la soluzione è prolungabile con continuità in $x = 0$ mediante il valore 0.

Domanda 2

L'unica affermazione corretta è la c), poiché se g è infinitesima all'infinito e continua su $[1,+\infty)$ essa è limitata, cioè esiste $M > 0$ t.c. $0 \le g \le M$. Pertanto, tenendo conto che $0 \le \mathrm{e}^{-x}g(x) \le M\mathrm{e}^{-x}$ e che la funzione $x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$ è impropriamente integrabile in $[1,+\infty)$, dal criterio del confronto si ottiene che l'integrale proposto è finito. Osserviamo, invece, che prendendo $g(x) = \mathrm{e}^{x/2}$, essa è continua e non negativa in $[1,+\infty)$, ma non limitata; tuttavia

$$\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^{x/2}\,dx = \int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-x/2}\,dx = \lim_{T\to+\infty}\left(-2\mathrm{e}^{-x/2}\Big|_1^T\right) = 2\sqrt{\mathrm{e}}\,,$$

e questo contraddice le affermazioni a) e b).

TEMA B

Esercizio 1
Osserviamo che $e^2 i = e^2 e^{i\pi/2}$, pertanto, ponendo $z = a + ib$, l'equazione proposta si trasforma nel sistema

$$\begin{cases} b = \pi/2 + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}, \qquad \text{e} \qquad 0 < b < 2\,; \\ \sqrt{a^2 + b^2} = 2\,; \end{cases}$$

le cui soluzioni sono date da $b = \pi/2$ e $a^2 = 4 - \pi^2/4$, ovvero $a = \pm\sqrt{4 - \pi^2/4}$. Quindi, le soluzioni cercate sono $z_{1,2} = \pm\sqrt{4 - \pi^2/4} + i\pi/2$.

Esercizio 2
Utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al primo ordine per la funzione $t \mapsto \tanh t$, con $t = x^2$, quello al secondo ordine per la funzione $t \mapsto \tan t$, con $t = 8x^4 + 2x^8$, e quello al quarto ordine per la funzione $t \mapsto \cos t$, con $t = 4x^2$, otteniamo

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{19(\tanh x^2)^4}{\tan(8x^4 + 2x^8) + \cos(4x^2) - 1} = \lim_{x\to 0^+} \frac{19x^8}{8x^4 + 2x^8 + 1 - 8x^4 + 32x^8/3 - 1} = \lim_{x\to 0^+} \frac{19x^8}{38x^8/3} = 3/2\,.$$

Esercizio 3
Per determinare gli estremanti della funzione assegnata $f(x) = 16\log x - 3\log^3 x$, studiamo la sua monotonia tramite il segno della derivata che è data da $f'(x) = \frac{1}{x}(16 - 9\log^2 x)$. Risolvendo si ottiene che f è crescente per $e^{-4/3} < x < e^{4/3}$ e decrescente per $0 < x < e^{-4/3}$ e $x > e^{4/3}$. Quindi in $(0, 1]$, tenendo conto che

$$1 < e^{4/3}\,, \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty\,, \qquad f(1) = 0\,,$$

si ricava che $x = e^{-4/3}$ è punto di minimo assoluto per f, non ci sono punti di massimo assoluto, poiché $\sup f = +\infty$, e $x = 1$ è punto di massimo relativo per f.

Domanda 1
L'unica risposta corretta è la d), infatti dall'algebra dei limiti si ottiene che $1/\infty^{+\infty} = 0$. Per contraddire le affermazioni a) e c) basta prendere $a_n = \sqrt{n}$, mentre per contraddire l'affermazione b) basta prendere $a_n = n$.

Esercizio 4
Effettuando la sostituzione in coordinate polari centrate nell'origine $x = r\cos\theta$ e $y = r\sin\theta$, da cui $dx\,dy = r\,dr\,d\theta$ ed $\tilde{E} = \{(r, \theta) \ : \ \log(\pi/2) \le r \le 1, \ 0 \le \theta \le \pi/4\}$, si ottiene

$$\begin{aligned} &\iint_E \frac{y e^{\sqrt{x^2+y^2}} \cos\left(e^{\sqrt{x^2+y^2}}\right)}{x\sqrt{x^2+y^2}}\, dx\ dy = \iint_{\tilde{E}} \frac{r\sin\theta\, e^{\sqrt{r^2}} \cos\left(e^{\sqrt{r^2}}\right)}{r\cos\theta \cdot \sqrt{r^2}}\, r\,dr\,d\theta \\ &= \left(\int_0^{\pi/4} \frac{\sin\theta}{\cos\theta}\, d\theta\right) \left(\int_{\log(\pi/2)}^1 e^r \cos(e^r)\, dr\right) \\ &= \left(-\log(\cos\theta)\Big|_0^{\pi/4}\right) \left(\sin(e^r)\Big|_{\log(\pi/2)}^1\right) = (\sin e - 1)\log\sqrt{2}\,. \end{aligned}$$

Esercizio 5 Poiché E è un insieme chiuso e limitato ed f è una funzione continua, per il Teorema di Weierstrass, esistono almeno un punto di minimo assoluto ed un punto di massimo assoluto per f nell'insieme E. Poiché f è un polinomio, esso è di classe $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$, quindi per determinare i suoi estremanti all'interno di

E possiamo utilizzare i metodi del calcolo differenziale. Cominciamo determinando i punti stazionari, cioè i punti che annullano il gradiente:

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 16x^3 + 5y = 0 \\ f_y(x,y) = 6y + 5x = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} y = -\dfrac{5}{6}x \\ x(16x^2 - 25/6) = 0 \end{cases}$$

$$\implies \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} x = \pm\dfrac{5}{4\sqrt{6}} \\ y = \mp\dfrac{25}{24\sqrt{6}} \end{cases}$$

ovvero ha come soluzioni i punti $P_1 = (0,0)$, $P_2 = (\frac{5}{4\sqrt{6}}, -\frac{25}{24\sqrt{6}})$, $P_3 = (-\frac{5}{4\sqrt{6}}, \frac{25}{24\sqrt{6}})$, nessuno dei quali appartiene all'interno di E. Quindi non ci sono estremanti interni ad E. Studiamo pertanto la sua frontiera.

- **Lato** $a = \{-1 \le x \le 0\,,\, y = 0\}$ Osserviamo che $f(x,0) = 4x^4 - 8$, quindi è decrescente in $[-1,0]$; pertanto, $(0,0)$ è punto di minimo vincolato al lato a, mentre $(-1,0)$ è punto di massimo vincolato al lato a.
- **Lato** $b = \{-1 \le y \le 0\,,\, x = -1\}$ Osserviamo che $f(-1,y) = 4 + 3y^2 - 5y - 8 =: g_1(y)$, da cui $g_1'(y) = 6y - 5 \le 0$. Quindi g_1 è decrescente in $[-1,0]$; pertanto, $(-1,0)$ è punto di minimo vincolato al lato b, mentre $(-1,-1)$ è punto di massimo vincolato al lato b.
- **Lato** $c = \{-1 \le x \le 0\,,\, x = y\}$ Osserviamo che $f(x,x) = 4x^4 + 8x^2 - 8 =: g_2(x)$, da cui $g_2'(x) = 16x^3 + 16x \le 0$ in $[-1,0]$. Quindi g_2 è decrescente in $[-1,0]$; pertanto, $(0,0)$ è punto di minimo vincolato al lato c, mentre $(-1,-1)$ è punto di massimo vincolato al lato c.

Dall'analisi effettuata, risulta che l'unico candidato minimo assoluto per f in E è il punto $(0,0)$, mentre l'unico candidato massimo assoluto per f in E è il punto $(-1,-1)$. Visto che, come affermato all'inizio, il teorema di Weierstrass ne assicura l'esistenza, avremo che effettivamente $(0,0)$ è punto di minimo assoluto per f in E e $(-1,-1)$ è punto di massimo assoluto per f in E. Non essendoci altri candidati, la funzione non ammette altri punti di estremo relativo.

Esercizio 6

Il problema di Cauchy proposto è associato ad un'equazione differenziale lineare del primo ordine non omogenea, il cui coefficiente e termine noto sono definiti e continui in $(-\infty,0) \cup (0,+\infty)$. Tenendo conto della condizione iniziale, assegnata in $x = 1$, considereremo l'intervallo $(0,+\infty)$. Per determinare la soluzione del problema utilizziamo la formula risolutiva, dopo aver calcolato gli integrali necessari, cioè:

$$\int_1^x \frac{1}{t}\,dt = \log x$$

$$\int_1^x 2\log^3(t^2)\mathrm{e}^{-\log t}\,dt = 16\int_1^x \frac{\log^3 t}{t}\,dt = 4\log^4\Big|_1^x = 4\log^4 x\,.$$

A questo punto la soluzione del problema di Cauchy sarà:

$$y(x) = \mathrm{e}^{\int_1^x \frac{1}{t}\,dt}\int_1^x 2\log^3(t^2)\mathrm{e}^{-\log t}\,dt = 4x\log^4 x\,.$$

Poiché $\lim_{x\to0^+} y(x) = \lim_{x\to0^+} 4x\log^4 x = 0$, la soluzione è prolungabile con continuità in $x = 0$ mediante il valore 0.

Domanda 2

L'unica affermazione corretta è la b), poiché se g è limitata in (0,1], esiste $M > 0$ t.c. $0 \le g \le M$. Pertanto, tenendo conto che $0 \le (1/\sqrt[3]{x})\,g(x) \le M(1/\sqrt[3]{x})$ e che la funzione $x \mapsto 1/\sqrt[3]{x}$ è impropriamente integrabile in $(0,1]$, dal criterio del confronto si ottiene che l'integrale proposto è finito. Osserviamo, invece, che prendendo $g(x) = 1/\sqrt[6]{x}$, essa è continua e non negativa in $(0,1]$, ma non infinitesima per $x \to 0^+$; tuttavia

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x}\,\sqrt[6]{x}}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{T\to0^+} -2\sqrt{x}\Big|_T^1 = 2\,,$$

e questo contraddice le affermazioni a) e c).

TEMA C

Esercizio 1
Osserviamo che $e^5 i = e^5 e^{i\pi/2}$, pertanto, ponendo $z = a + ib$, l'equazione proposta si trasforma nel sistema

$$\begin{cases} a = \pi/2 + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}, \qquad \text{e} \qquad 0 < a < 2\,; \\ \sqrt{a^2+b^2} = 2\,; \end{cases}$$

le cui soluzioni sono date da $a = \pi/2$ e $b^2 = 25 - \pi^2/4$, ovvero $b = \pm\sqrt{25 - \pi^2/4}$. Quindi, le soluzioni cercate sono $z_{1,2} = \pi/2 \pm \sqrt{25 - \pi^2/4}i$.

Esercizio 2
Utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al primo ordine per la funzione $t \mapsto \sinh t$, con $t = 7x^4$, quello al secondo ordine per la funzione $t \mapsto \cos t$, con $t = 2x$, e per la funzione $t \mapsto \tan t$, con $t = x^2 + 2x^4$, otteniamo

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1 - \cos(2x) - 2\tan(x^2+2x^4)}{\sinh(7x^4)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1 - 1 + 2x^2 - 2x^4/3 - 2x^2 - 4x^4}{7x^4} = \lim_{x\to 0^+} -\frac{2x^4}{3x^4} = -2/3\,.$$

Esercizio 3
Per determinare gli estremanti della funzione assegnata $f(x) = 2\log^2 x - 25\log^4 x$, studiamo la sua monotonia tramite il segno della derivata che è data da $f'(x) = \frac{4\log x}{x}(1 - 25\log^2 x)$. Risolvendo si ottiene che f è decrescente per $e^{-1/5} < x < 1$ e $x > e^{1/5}$ e crescente per $0 < x < e^{-1/5}$ e $1 < x < e^{1/5}$. Quindi in $(0, 1]$, tenendo conto che

$$1 < e^{1/5}\,, \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty\,, \qquad f(1) = 0\,,$$

si ricava che $x = e^{-1/5}$ è punto di massimo assoluto per f, non ci sono punti di minimo assoluto, poiché $\inf f = -\infty$, e $x = 1$ è punto di minimo relativo per f.

Domanda 1
L'unica risposta corretta è la *a*), infatti dall'algebra dei limiti si ottiene che $1/\infty^{+\infty} = 0$. Per contraddire le affermazioni *b*) e *c*) basta prendere $a_n = \sqrt{n}$, mentre per contraddire l'affermazione *d*) basta prendere $a_n = n$.

Esercizio 4
Effettuando la sostituzione in coordinate polari centrate nell'origine $x = r\cos\theta$ e $y = r\sin\theta$, da cui $dx\,dy = r\,dr\,d\theta$ ed $\tilde{E} = \{(r,\theta) \ : \ \log(\pi/3) \le r \le 1, \ \pi/4 \le \theta \le \pi/2\}$, si ottiene

$$\begin{aligned} &\iint_E \frac{x e^{\sqrt{x^2+y^2}} \sin\left(e^{\sqrt{x^2+y^2}}\right)}{y\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\ dy = \iint_{\tilde{E}} \frac{r\cos\theta\, e^{\sqrt{r^2}} \sin\left(e^{\sqrt{r^2}}\right)}{r\sin\theta\cdot\sqrt{r^2}}\,r\,dr\,d\theta \\ &= \left(\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\,d\theta\right)\left(\int_{\log(\pi/3)}^{1} e^r \sin(e^r)\,dr\right) \\ &= \left(\log(\sin\theta)\Big|_{\pi/4}^{\pi/2}\right)\left(-\cos(e^r)\Big|_{\log(\pi/3)}^{1}\right) = (\log\sqrt{2})(1/2 - \cos e)\,. \end{aligned}$$

Esercizio 5 Poiché E è un insieme chiuso e limitato ed f è una funzione continua, per il Teorema di Weierstrass, esistono almeno un punto di minimo assoluto ed un punto di massimo assoluto per f nell'insieme E. Poiché f è un polinomio, esso è di classe $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$, quindi per determinare i suoi estremanti all'interno di E possiamo utilizzare i metodi del calcolo differenziale. Cominciamo determinando i punti stazionari, cioè i punti che annullano il gradiente:

$$\begin{cases} f_x(x,y) = -12x^3 - 3y = 0 \\ f_y(x,y) = -12y - 3x = 0 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} y = -\dfrac{1}{4}x \\ -3x(16x^2 - 1) = 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \qquad \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \qquad \text{oppure} \qquad \begin{cases} x = \pm\dfrac{1}{4} \\ y = \mp\dfrac{1}{16} \end{cases}$$

ovvero ha come soluzioni i punti $P_1 = (0,0)$, $P_2 = (\frac{1}{4}, -\frac{1}{16})$, $P_3 = (-\frac{1}{4}, \frac{1}{16})$, nessuno dei quali appartiene all'interno di E. Quindi non ci sono estremanti interni ad E. Studiamo pertanto la sua frontiera.

- **Lato** $a = \{-1 \le x \le 0\,,\ y = -1\}$ Osserviamo che $f(x,-1) = 2 - 3x^4 + 3x =: g_1(x)$, da cui $g_1'(x) = -12x^3 + 3 \ge 0$. Quindi è crescente in $[-1,0]$; pertanto, $(-1,-1)$ è punto di minimo vincolato al lato a, mentre $(0,-1)$ è punto di massimo vincolato al lato a.
- **Lato** $b = \{-1 \le y \le 0\,,\ x = 0\}$ Osserviamo che $f(-1,y) = 8 - 6y^2$, quindi è crescente in $[-1,0]$; pertanto, $(0,-1)$ è punto di minimo vincolato al lato b, mentre $(0,0)$ è punto di massimo vincolato al lato b.
- **Lato** $c = \{-1 \le x \le 0\,,\ x = y\}$ Osserviamo che $f(x,x) = 8 - 3x^4 - 9x^2 =: g_2(x)$, da cui $g_2'(x) = -12x^3 - 18x \ge 0$ in $[-1,0]$. Quindi g_2 è crescente in $[-1,0]$; pertanto, $(-1,-1)$ è punto di minimo vincolato al lato c, mentre $(0,0)$ è punto di massimo vincolato al lato c.

Dall'analisi effettuata, risulta che l'unico candidato massimo assoluto per f in E è il punto $(0,0)$, mentre l'unico candidato minimo assoluto per f in E è il punto $(-1,-1)$. Visto che, come affermato all'inizio, il teorema di Weierstrass ne assicura l'esistenza, avremo che effettivamente $(0,0)$ è punto di massimo assoluto per f in E e $(-1,-1)$ è punto di minimo assoluto per f in E. Non essendoci altri candidati, la funzione non ammette altri punti di estremo relativo.

Esercizio 6

Il problema di Cauchy proposto è associato ad un'equazione differenziale lineare del primo ordine non omogenea, il cui coefficiente e termine noto sono definiti e continui in $(-\infty,0) \cup (0,+\infty)$. Tenendo conto della condizione iniziale, assegnata in $x = 1$, considereremo l'intervallo $(0,+\infty)$. Per determinare la soluzione del problema utilizziamo la formula risolutiva, dopo aver calcolato gli integrali necessari, cioè:

$$\int_1^x \frac{1}{t}\,dt = \log x$$
$$\int_1^x \log^2(t^3)\mathrm{e}^{-\log t}\,dt = 9\int_1^x \frac{\log^2 t}{t}\,dt = 3\log^3\Big|_1^x = 3\log^3 x\,.$$

A questo punto la soluzione del problema di Cauchy sarà:

$$y(x) = \mathrm{e}^{\int_1^x \frac{1}{t}\,dt}\int_1^x \log^2(t^3)\mathrm{e}^{-\log t}\,dt = 3x\log^3 x\,.$$

Poiché $\lim_{x\to0^+} y(x) = \lim_{x\to0^+} 3x\log^3 x = 0$, la soluzione è prolungabile con continuità in $x = 0$ mediante il valore 0.

Domanda 2

L'unica affermazione corretta è la c), poiché se g è limitata in (0,1], esiste $M > 0$ t.c. $0 \le g \le M$. Pertanto, tenendo conto che $0 \le (1/\sqrt[3]{x})\,g(x) \le M(1/\sqrt[3]{x})$ e che la funzione $x \mapsto 1/\sqrt[3]{x}$ è impropriamente integrabile in $(0,1]$, dal criterio del confronto si ottiene che l'integrale proposto è finito. Osserviamo, invece, che prendendo $g(x) = 1/\sqrt[6]{x}$, essa è continua e non negativa in $(0,1]$, ma non infinitesima per $x \to 0^+$; tuttavia

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x}\,\sqrt[6]{x}}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{T\to0^+} -2\sqrt{x}\Big|_T^1 = 2\,,$$

e questo contraddice le affermazioni a) e b).

TEMA D

Esercizio 1
Osserviamo che $e^9 = e^9 e^{i0}$, pertanto, ponendo $z = a + ib$, l'equazione proposta si trasforma nel sistema

$$\begin{cases} b = 0 + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}, & \text{e} \qquad |b| < 1\,; \\ \sqrt{a^2+b^2} = 9\,; \end{cases}$$

le cui soluzioni sono date da $b = 0$ e $|a| = 9$, ovvero $a = \pm 9$. Quindi, le soluzioni cercate sono $z_{1,2} = \pm 9$.

Esercizio 2
Utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al primo ordine per la funzione $x \mapsto \arctan x$ e quello al secondo ordine per la funzione $t \mapsto \sin t$, con $t = 3x^4 + x^8$, e per la funzione $t \mapsto \log(1+t)$, con $t = x^4$, otteniamo

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{(\arctan x)^8}{3\log(1+x^4) - \sin(3x^4+x^8)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^8}{3x^4 - 3x^8/2 - 3x^4 - x^8} = \lim_{x\to 0^+} -\frac{2x^8}{5x^8} = -2/5\,.$$

Esercizio 3
Per determinare gli estremanti della funzione assegnata $f(x) = -27e^x + \frac{1}{4}e^{4x}$, studiamo la sua monotonia tramite il segno della derivata che è data da $f'(x) = e^{4x} - 27e^x$. Ponendo $e^x = t$, ci riconduciamo a studiare il segno del polinomio $p(t) = t^4 - 27t = t(t^3 - 27)$, che risulta essere positivo per $t < 0$ e $t > 3$ e negativo per $0 < t < 3$. Risolvendo rispetto alla variabile originaria x, si ottiene che f è crescente per $x > \log 3$ e decrescente per $x < \log 3$. Quindi in $(-\infty, \log(3\sqrt[3]{4})]$, tenendo conto che

$$\log 3 < \log(3\sqrt[3]{4})\,, \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0 \qquad \text{e} \qquad f(\log(3\sqrt[3]{4})) = 0\,,$$

si ricava che $x = \log 3$ è punto di minimo assoluto per f, mentre $x = \log(3\sqrt[3]{4})$ è punto di massimo assoluto per f.

Domanda 1
L'unica risposta corretta è la risposta *c*), infatti dall'algebra dei limiti si ottiene che $0^{+\infty} = 0$. Per contraddire le affermazioni *a*), *b*) e *d*) basta prendere $a_n = 1/\sqrt[3]{n}$.

Esercizio 4
Effettuando la sostituzione in coordinate polari centrate nell'origine $x = r\cos\theta$ e $y = r\sin\theta$, da cui $dx\,dy = r\,dr\,d\theta$ ed $\tilde{E} = \{(r,\theta)\ :\ 1 \le r \le e^{\pi/2},\ 0 \le \theta\pi/4\}$, si ottiene

$$\iint_E \frac{y^2\cos\left(\log\sqrt{x^2+y^2}\right)}{x^2(x^2+y^2)}\,dx\ dy = \iint_{\tilde{E}} \frac{r^2\sin^2\theta\cos\left(\log\sqrt{r^2}\right)}{r^2\cos^2\theta\cdot r^2}\,r\,dr\,d\theta$$

$$= \left(\int_0^{\pi/4} \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}\,d\theta\right)\left(\int_1^{e^{\pi/2}} \frac{\cos(\log r)}{r}\,dr\right) = \left(\int_0^{\pi/4}\left[\frac{1}{\cos^2\theta} - 1\right]d\theta\right)\left(\sin(\log r)\Big|_1^{e^{\pi/2}}\right)$$

$$= \left(\tan\theta\Big|_0^{\pi/4} - \pi/4\right) = 1 - \pi/4\,.$$

Esercizio 5 Poiché E è un insieme chiuso e limitato ed f è una funzione continua, per il Teorema di Weierstrass, esistono almeno un punto di minimo assoluto ed un punto di massimo assoluto per f nell'insieme E. Poiché f è un polinomio, esso è di classe $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$, quindi per determinare i suoi estremanti all'interno di E possiamo utilizzare i metodi del calcolo differenziale. Cominciamo determinando i punti stazionari, cioè i punti che annullano il gradiente:

$$\begin{cases} f_x(x,y) = -8x - 2y = 0 \\ f_y(x,y) = -15y^2 - 2x = 0 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} x = -\dfrac{1}{4}y \\ -y(30y-1) = 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \qquad \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \qquad \text{oppure} \qquad \begin{cases} y = \dfrac{1}{30} \\ x = -\dfrac{1}{120} \end{cases}$$

ovvero ha come soluzioni i punti $P_1 = (0, 0)$, $P_2 = (-\frac{1}{120}, \frac{1}{30})$, nessuno dei quali appartiene all'interno di E. Quindi non ci sono estremanti interni ad E. Studiamo pertanto la sua frontiera.

- **Lato** $a = \{0 \le x \le 1\,,\ y = 1\}$ Osserviamo che $f(x, 1) = 2-4x^2-2x =: g_1(x)$, da cui $g_1'(x) = -8x-2 \le 0$. Quindi g_1 è decrescente in $[0, 1]$; pertanto, $(0, 0)$ è punto di massimo vincolato al lato a, mentre $(1, 1)$ è punto di minimo vincolato al lato a.
- **Lato** $b = \{0 \le y \le 1\,,\ x = 0\}$ Osserviamo che $f(0, y) = 7-5y^2$, quindi è decrescente in $[0, 1]$; pertanto, $(0, 0)$ è punto di massimo vincolato al lato b, mentre $(0, 1)$ è punto di minimo vincolato al lato b.
- **Lato** $c = \{0 \le x \le 1\,,\ x = y\}$ Osserviamo che $f(x, x) = 7-5x^3-6x^2 =: g_2(x)$, da cui $g_2'(x) = -15x^2-12x \le 0$ in $[0, 1]$. Quindi g_2 è decrescente in $[0, 1]$; pertanto, $(0, 0)$ è punto di massimo vincolato al lato c, mentre $(1, 1)$ è punto di minimo vincolato al lato c.

Dall'analisi effettuata, risulta che l'unico candidato massimo assoluto per f in E è il punto $(0, 0)$, mentre l'unico candidato minimo assoluto per f in E è il punto $(1, 1)$. Visto che, come affermato all'inizio, il teorema di Weierstrass ne assicura l'esistenza, avremo che effettivamente $(0, 0)$ è punto di massimo assoluto per f in E e $(1, 1)$ è punto di minimo assoluto per f in E. Non essendoci altri candidati, la funzione non ammette altri punti di estremo relativo.

Esercizio 6

Il problema di Cauchy proposto è associato ad un'equazione differenziale lineare del primo ordine non omogenea, il cui coefficiente e termine noto sono definiti e continui in $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Tenendo conto della condizione iniziale, assegnata in $x = 1$, considereremo l'intervallo $(0, +\infty)$. Per determinare la soluzione del problema utilizziamo la formula risolutiva, dopo aver calcolato gli integrali necessari, cioè:

$$\int_1^x \frac{2}{t^2}\, dt = 2 - \frac{2}{x}$$
$$\int_1^x 4t\mathrm{e}^{t^2-2/t}\, \mathrm{e}^{2/t-2}\, dt = \frac{4}{\mathrm{e}^2}\int_1^x t\mathrm{e}^{t^2}\, dt = \frac{2}{\mathrm{e}^2}(\mathrm{e}^{x^2} - \mathrm{e})\,.$$

A questo punto la soluzione del problema di Cauchy sarà:

$$y(x) = \mathrm{e}^{\int_1^x 2/t^2\, dt}\left(1 + \int_1^x 4t\mathrm{e}^{t^2-2/t}\mathrm{e}^{2/t-2}\, dt\right) = \mathrm{e}^{2-2/x}\left[1 + \frac{2}{\mathrm{e}^2}(\mathrm{e}^{x^2} - \mathrm{e})\right] = \mathrm{e}^{-2/x}\left[\mathrm{e}^2 + 2(\mathrm{e}^{x^2} - \mathrm{e})\right]\,.$$

Poiché $\lim_{x\to 0^+} y(x) = \lim_{x\to 0^+} \mathrm{e}^{-2/x}\left[\mathrm{e}^2 + 2(\mathrm{e}^{x^2} - \mathrm{e})\right] = 0$, la soluzione è prolungabile con continuità in $x = 0$ mediante il valore 0.

Domanda 2

L'unica affermazione corretta è la *a*), poiché se g è infinitesima all'infinito e continua su $[1, +\infty)$ essa è limitata, cioè esiste $M > 0$ t.c. $0 \le g \le M$. Pertanto, tenendo conto che $0 \le \mathrm{e}^{-x}g(x) \le M\mathrm{e}^{-x}$ e che la funzione $x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$ è impropriamente integrabile in $[1, +\infty)$, dal criterio del confronto si ottiene che l'integrale proposto è finito. Osserviamo, invece, che prendendo $g(x) = \mathrm{e}^{x/2}$, essa è continua e non negativa in $[1, +\infty)$, ma non limitata; tuttavia

$$\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\mathrm{e}^{x/2}\, dx = \int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-x/2}\, dx = \lim_{T\to+\infty}\left(-2\mathrm{e}^{-x/2}\Big|_1^T\right) = 2\sqrt{\mathrm{e}}\,,$$

e questo contraddice le affermazioni *b*) e *c*).