SOLUZIONI COMPITO del 27/04/2020
ANALISI MATEMATICA I - 9 CFU
ENERGETICA - MECCANICA

TEMA

Esercizio 1

Poniamo $z = a+ib$, da cui $\overline{z} = a-ib$, $|\overline{z}| = \sqrt{a^2+b^2}$, $Im(z+2) = b = Im(z-3)$ e $Re(\overline{z}+2i) = a$. Pertanto, l'equazione proposta si riscrive nella forma

$$\sqrt{a^2+b^2} - 2b + 3iba = 4\,,$$

da cui si ricava

$$\begin{cases} \sqrt{a^2+b^2} - 2b = 4\,, \\ 3ab = 0\,, \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} b = 0\,, \\ |a| = 4\,, \end{cases} \qquad \text{oppure} \qquad \begin{cases} a = 0\,, \\ |b| - 2b = 4\,. \end{cases}$$

Il primo sistema fornisce $z = \pm 4$; il secondo sistema porta a

$$\begin{cases} a = 0\,,\ b \geq 0\,, \\ -b = 4\,, \end{cases} \quad \text{che è impossibile;} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} a = 0\,,\ b < 0\,, \\ -3b = 4\,, \end{cases} \quad \text{che fornisce } z = -\tfrac{4}{3}i.$$

Quindi, in totale, abbiamo tre soluzioni date da $z_1 = -4$, $z_2 = 4$ e $z_3 = -4i/3$.
Infine, $Re(z_1) + Re(z_2) + Re(z_3) = -4 + 4 + 0 = 0$.

Esercizio 2

Utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al secondo ordine per la funzione $t \mapsto \sqrt{1+t}$, con $t = 4/n$, e per la funzione $t \mapsto \cos t$, con $t = 1/n$, si ottiene

$$\sqrt{1+\frac{4}{n}} = 1 + \frac{1}{2}\frac{4}{n} - \frac{1}{8}\frac{16}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) = 1 + \frac{2}{n} - \frac{2}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\,,$$

$$\cos\frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\,.$$

Quindi possiamo riscrivere

$$a_n := \left[\sqrt{1+\frac{4}{n}} - \frac{\alpha^2-1}{n} - \cos\frac{1}{n}\right](n^2-2n) \sim \left(1 + \frac{2}{n} - \frac{2}{n^2} - \frac{\alpha^2-1}{n} - 1 + \frac{1}{2n^2}\right)n^2$$

$$\sim \begin{cases} \dfrac{3-\alpha^2}{n}\,n^2 & \text{se } \alpha \neq \pm\sqrt{3}, \\ -\dfrac{3}{2n^2}\,n^2 & \text{se } \alpha = \pm\sqrt{3}, \end{cases} \qquad \longrightarrow \qquad \begin{cases} +\infty & \text{se } -\sqrt{3} < \alpha < \sqrt{3}, \\ -\infty & \text{se } \alpha < -\sqrt{3} \text{ oppure } \alpha > \sqrt{3}, \\ -3/2 & \text{se } \alpha = \pm\sqrt{3}. \end{cases}$$

Esercizio 3

L'equazione differenziale proposta risulta essere un'equazione lineare del secondo ordine a coefficienti costanti e non omogenea. L'equazione caratteristica associata è data da $\lambda^2+3=0$, che ha come soluzioni $\lambda=\pm\sqrt{3}i$. Pertanto, l'integrale generale dell'equazione omogenea associata è $y_0(x)=C_1\cos(\sqrt{3}x)+C_2\sin(\sqrt{3}x)$. Dal metodo di somiglianza, otteniamo che una soluzione particolare si può cercare nella forma $y_p(x)=ax^2+bx+c$, da cui $y'(x)=2a+bx$ e $y''(x)=2a$. Inserendo nell'equazione completa ed applicando il principio d'identità dei polinomi, ricaviamo

$$2a+3ax^2+3bx+3c=4x^2+3x\,,\quad \text{da cui}\quad \begin{cases} 3a=4\,, \\ 3b=3\,, \\ 2a+3c=0\,, \end{cases} \quad\Longrightarrow\quad \begin{cases} a=4/3\,, \\ b=1\,, \\ c=-8/9\,. \end{cases}$$

Quindi, l'integrale generale dell'equazione proposta è

$$y(x)=C_1\cos(\sqrt{3}x)+C_2\sin(\sqrt{3}x)+\frac{4}{3}\,x^2+x-\frac{8}{9}\,.$$

Imponendo, ora le condizioni iniziali, si ricava

$$\begin{cases} C_1-8/9=1/9 \quad\Longrightarrow\quad C_1=1\,, \\ \sqrt{3}C_2+1=11/3 \quad\Longrightarrow\quad C_2=8/(3\sqrt{3})\,. \end{cases}$$

Pertanto, la soluzione del problema di Cauchy sarà $y(x)=\cos(\sqrt{3}x)+8/(3\sqrt{3})\sin(\sqrt{3}x)+\frac{4}{3}\,x^2+x-\frac{8}{9}$. Tenendo conto che $f(0)=0$ ed $f'(0)=(4x-\frac{4}{3}e^{4x/3})\Big|_{x=0}=-4/3$, otteniamo che l'equazione della retta tangente al grafico di f nell'origine è data da $r(x)=-\frac{4}{3}x$. Pertanto, il limite proposto sarà

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{y(x)-\frac{4}{3}x^2}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\cos(\sqrt{3}x)+8/(3\sqrt{3})\sin(\sqrt{3}x)+x-\frac{8}{9}}{x}\right)=1\,.$$

Esercizio 4

Effettuando il cambio di variabile $t=\sqrt{x+2}$, da cui $x=t^2-2$, $dx=2t\,dt$, $t(-1)=1$ e $t(e^2-2)=e$, l'integrale proposto si riscrive nella forma

$$\int_{-1}^{e^2-2}\sqrt{x+2}\;\log(\sqrt{x+2})\,dx=2\int_1^e t^2\,\log t\,dt\,.$$

Integrando, ora, per parti, si ottiene

$$2\int_1^e t^2\,\log t\,dt=2\,\frac{t^3}{3}\,\log t\Big|_1^e-\frac{2}{3}\int_1^e t^3\,\frac{1}{t}\,dt=\frac{2}{3}\,e^3-\frac{2}{3}\int_1^e t^2\,dt=\frac{2}{3}\,e^3-\frac{2}{3}\frac{t^3}{3}\Big|_1^e=\frac{2}{3}\,e^3-\frac{2}{9}e^3+\frac{2}{9}\,.$$

Esercizio 5

1. Per l'enunciato e la dimostrazione del teorema si veda il libro di testo.
2. Poiché $x^3f(x)>0$ per ogni $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, la funzione f ha il segno concorde con quello di x, cioè $f(x)>0$, per $x>0$, mentre $f(x)<0$, per $x<0$. Inoltre, poichè f è una funzione continua e cambia segno attraversando l'origine, per il teorema degli zeri, essa si annulla in $x=0$. Osserviamo anche che, come conseguenza del segno di f e del fatto che la funzione $t\mapsto(2-\sin t)$ è sempre strettamente positiva, si ricava

$$\int_0^x(2-\sin t)f(t)\,dt=\begin{cases} \displaystyle\int_0^x(2-\sin t)f(t)\,dt>0 & \text{per } x>0; \\ \displaystyle\int_0^0(2-\sin t)f(t)\,dt=0 & \text{per } x=0; \\ \displaystyle-\int_x^0(2-\sin t)f(t)\,dt>0 & \text{per } x<0. \end{cases}$$

Pertanto, $F(x)>0$ su tutto $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ ed è nulla in $x=0$, che risulta essere l'unico punto di minimo assoluto.