SOLUZIONI APPELLO STRAORDINARIO del 27/10/2014
ANALISI MATEMATICA I - 9 CFU
MECCANICA - ENERGETICA

TEMA A

Esercizio 1

Innanzitutto, osserviamo che

$$\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x(x^2-3) = \lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x x^2 = +\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x(x^2-3) = \lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x x^2 = 0^+\,,$$

quindi la funzione è superiormente illimitata ed ha asintoto orizzontale $y = 0$ per $x \to -\infty$. Derivando la funzione assegnata, otteniamo $f'(x) = \mathrm{e}^x(x^2 - 3 + 2x)$, che risulta essere positiva per $x < -3$ e $x > 1$, negativa per $-3 < x < 1$ e nulla in $x = -3; 1$. Pertanto, $x = -3$ è punto di massimo relativo e $x = 1$ è punto di minimo relativo con $f(1) = -2\mathrm{e} < 0$. Osserviamo, inoltre, che f si annulla per $x = \pm\sqrt{3}$. Considerando, quindi, la funzione $g(x) = |f(x)|$, si ricava subito che, nell'intervallo chiuso e limitato $[-4, 4]$, $x = \pm\sqrt{3}$ sono punti di minimo assoluto, $x = -4$ è punto di minimo relativo e $x = -3; 1; 4$ sono punti di massimo relativo. Valutando la funzione in tali punti, otteniamo

$$g(-3) = 6\mathrm{e}^{-3}\,, \qquad g(1) = 2\mathrm{e}\,, \qquad g(4) = 13\mathrm{e}^4\,.$$

Pertanto, $x = 4$ è anche punto di massimo assoluto.

Esercizio 2

Ponendo $a_n := \left[\cos\frac{2}{n} - 1 + \sin\frac{2}{n^2}\right][\log(1+\mathrm{e}^n)]^4$ ed utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al quarto ordine per la funzione $x \mapsto \cos x$, con $x = 2/n$, e quello al terzo ordine per la funzione $x \mapsto \sin x$, con $x = 2/n^2$, otteniamo

$$a_n \sim \left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{2}{n}\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(\frac{2}{n}\right)^4 - 1 + \frac{2}{n^2} - \frac{1}{3!}\left(\frac{2}{n^2}\right)^3\right][\log(\mathrm{e}^n)]^4 \sim \frac{2}{3n^4}n^4 = \frac{2}{3}\,.$$

Pertanto, il limite proposto vale $2/3$.

Esercizio 3

Riscrivendo l'equazione nella forma $z^4 = 1 + i$ ed osservando che $1 + i = \sqrt{2}\mathrm{e}^{i\pi/4}$, si ottiene

$$z = \sqrt[4]{\sqrt{2}\mathrm{e}^{i\pi/4}} = \begin{cases} \sqrt[8]{2}\mathrm{e}^{i\pi/16}\,, \\ \sqrt[8]{2}\mathrm{e}^{i9\pi/16}\,, \\ \sqrt[8]{2}\mathrm{e}^{i17\pi/16}\,, \\ \sqrt[8]{2}\mathrm{e}^{i25\pi/16}\,. \end{cases}$$

Esercizio 4

Osserviamo che, riscrivendo l'equazione proposta nella forma

$$y'(x) = -\left(\frac{\sin x}{2+\cos x}\right)[y^2(x) + 1]\,,$$

essa risulta essere un'equazione del primo ordine a variabili separabili, priva di integrali singolari. Separando le variabili ed integrando, otteniamo

$$\arctan[y(x)] = \int \frac{1}{y^2+1}\,dy = -\int \frac{\sin x}{2+\cos x}\,dx = \log(2+\cos x) + C\,.$$

Imponendo la condizione iniziale e invertendo l'arcotangente, si ricava che la soluzione del problema di Cauchy è $y(x) = \tan[\log(2 + \cos x)]$. Per completezza, osserviamo che la soluzione trovata è definita su tutto $\mathbb{R}$, in quanto $0 \le \log(2 + \cos x) \le \log 3 < \pi/2$.

Esercizio 5

L'unica affermazione corretta è la B), in quanto $a_n/b_n \to +\infty$, cioè non soddisfa la condizione necessaria per la convergenza e quindi la serie, essendo a termini positivi, diverge.
Prendendo $a_n = n$ e $b_n = 1/n$, si ottiene che $a_n b_n = 1$, per cui la A) e la C) risultano false in quanto non è soddisfatta la condizione necessaria per la convergenza. Infine, prendendo $a_n = n^3$ e $b_n = 1/n$, si ottiene che $a_n b_n = n^2$ e quindi la serie in D) converge, per confronto con la serie armonica generalizzata di esponente $2 > 1$.

TEMA B

Esercizio 1

Innanzitutto, osserviamo che

$$\lim_{x\to+\infty} e^{2x}(x^2-2) = \lim_{x\to+\infty} e^{2x}x^2 = +\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to-\infty} e^{2x}(x^2-2) = \lim_{x\to-\infty} e^{2x}x^2 = 0^+\,,$$

quindi la funzione è superiormente illimitata ed ha asintoto orizzontale $y = 0$ per $x \to -\infty$. Derivando la funzione assegnata, otteniamo $f'(x) = e^{2x}(2x^2 - 4 + 2x)$, che risulta essere positiva per $x < -2$ e $x > 1$, negativa per $-2 < x < 1$ e nulla in $x = -2; 1$. Pertanto, $x = -2$ è punto di massimo relativo e $x = 1$ è punto di minimo relativo con $f(1) = -e^2 < 0$. Osserviamo, inoltre, che f si annulla per $x = \pm\sqrt{2}$. Considerando, quindi, la funzione $g(x) = |f(x)|$, si ricava subito che, nell'intervallo chiuso e limitato $[-5, 5]$, $x = \pm\sqrt{2}$ sono punti di minimo assoluto, $x = -5$ è punto di minimo relativo e $x = -2; 1; 5$ sono punti di massimo relativo. Valutando la funzione in tali punti, otteniamo

$$g(-2) = 2e^{-4}\,, \qquad g(1) = e^2\,, \qquad g(5) = 23e^{10}\,.$$

Pertanto, $x = 5$ è anche punto di massimo assoluto.

Esercizio 2

Ponendo $a_n := \left[\sinh\frac{1}{n} + 1 - \cosh\sqrt{\frac{2}{n}}\right][\log(1 + e^{2n})]^2$ ed utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al quarto ordine per la funzione $x \mapsto \cosh x$, con $x = \sqrt{2/n}$, e quello al terzo ordine per la funzione $x \mapsto \sinh x$, con $x = 1/n$, otteniamo

$$a_n \sim \left[\frac{1}{n} + \frac{1}{3!}\left(\frac{1}{n}\right)^3 + 1 - 1 - \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{2}{n}}\right)^2 - \frac{1}{4!}\left(\sqrt{\frac{2}{n}}\right)^4\right][\log(e^{2n})]^2 \sim -\frac{1}{6n^2}(2n)^2 = -\frac{2}{3}\,.$$

Pertanto, il limite proposto vale $-2/3$.

Esercizio 3

Riscrivendo l'equazione nella forma $z^4 = -1 - i$ ed osservando che $-1 - i = \sqrt{2}e^{i5\pi/4}$, si ottiene

$$z = \sqrt[4]{\sqrt{2}e^{i5\pi/4}} = \begin{cases} \sqrt[8]{2}e^{i5\pi/16}\,, \\ \sqrt[8]{2}e^{i13\pi/16}\,, \\ \sqrt[8]{2}e^{i21\pi/16}\,, \\ \sqrt[8]{2}e^{i29\pi/16}\,. \end{cases}$$

Esercizio 4

Osserviamo che, riscrivendo l'equazione proposta nella forma

$$y'(x) = \left(\frac{2\cos x}{6 + 4\sin x}\right)[y^2(x) + 1]\,,$$

essa risulta essere un'equazione del primo ordine a variabili separabili, priva di integrali singolari. Separando le variabili ed integrando, otteniamo

$$\arctan[y(x)] = \int \frac{1}{y^2+1}\,dy = \int \frac{\cos x}{3 + 2\sin x}\,dx = \frac{1}{2}\log(3 + 2\sin x) + C\,.$$

Imponendo la condizione iniziale e invertendo l'arcotangente, si ricava che la soluzione del problema di Cauchy è $y(x) = \tan\left[\log\sqrt{(3 + 2\sin x)}\right]$. Per completezza, osserviamo che la soluzione trovata è definita su tutto $\mathbb{R}$, in quanto $0 \le \log\sqrt{(3 + 2\sin x)} \le \frac{1}{2}\log 5 < \pi/2$.

Esercizio 5

L'unica affermazione corretta è la *D*), in quanto $a_n/b_n \to +\infty$, cioè non soddisfa la condizione necessaria per la convergenza e quindi la serie, essendo a termini positivi, diverge.

Prendendo $a_n = n$ e $b_n = 1/n$, si ottiene che $a_nb_n = 1$, per cui la *A*) e la *B*) risultano false in quanto non è soddisfatta la condizione necessaria per la convergenza. Infine, prendendo $a_n = n^3$ e $b_n = 1/n$, si ottiene che $a_nb_n = n^2$ e quindi la serie in *C*) converge, per confronto con la serie armonica generalizzata di esponente $2 > 1$.