SOLUZIONI COMPITO INTEGRATIVO

Esercizio 1

Osserviamo che, per ogni $\alpha \in (0, +\infty)$, l'integranda è una funzione continua e positiva in $(0, 1)$, e quindi integrabile in senso proprio in ogni intervallo chiuso e limitato della forma $[\delta, 1 - \delta]$, con $0 < \delta < 1/2$. Pertanto, per stabilire se l'integrale proposto esiste finito, esso va studiato in un intorno destro $U(0^+)$ del punto $x = 0$ ed in un intorno sinistro $U(1^-)$ del punto $x = 1$.

In $U(0^+)$, utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al primo ordine per le funzioni $x \mapsto \sin x$ e $y \mapsto \log(1+y)$, con $y = x^\alpha$, si ha

$$0 \leq f(x) \sim \frac{x}{x^\alpha} = \frac{1}{x^{\alpha-1}} \qquad \text{che è integrabile in senso improprio solo per } \alpha - 1 < 1;$$

quindi, per il criterio del confronto asintotico, l'integrale esiste finito se $0 < \alpha < 2$, mentre diverge per $\alpha \geq 2$.

In $U(1^-)$, invece, si ha

$$0 \leq f(x) \sim \frac{\sin 1}{(1-x)^{1/2} \log 2} \qquad \text{che è sempre integrabile in senso improprio.}$$

In conclusione, l'integrale proposto esiste finito solo per $0 < \alpha < 2$.

Esercizio 2

Innanzitutto osserviamo che la funzione proposta, in quanto somma di potenze positive, è continua sull'insieme chiuso e limitato C. Pertanto, grazie al Teorema di Weierstrass, essa ammette almeno un punto di massimo ed un punto di minimo assoluti. Poiché l'insieme C può essere scritto sotto la forma di vincolo $C = \{g(x, y) = x^2 + y^2 - \frac{3}{16} = 0\}$, introduciamo la Lagrangiana $L(x, y, \lambda)$ associata al problema proposto e data da

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y) = x^2 - y^2 + x - y + \lambda \left(x^2 + y^2 - \frac{3}{16} \right).$$

Derivando, otteniamo

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 2x + 1 + 2\lambda x = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = -2y - 1 + 2\lambda y = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 - \dfrac{3}{16} = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = -\dfrac{1}{2(\lambda + 1)} \\ y = \dfrac{1}{2(\lambda - 1)} \\ \dfrac{1}{4(\lambda + 1)^2} + \dfrac{1}{4(\lambda - 1)^2} - \dfrac{3}{16} = 0 \end{cases} \qquad \lambda \neq \pm 1.$$

Risolvendo l'ultima equazione, si ottiene $\lambda^2 = 5,\ -1/3$, che fornisce $\lambda = \pm\sqrt{5}$, poiché la soluzione $\lambda^2 = -1/3$ è inammissibile. Sostituendo i valori di λ cosìottenuti nelle espressioni di x ed y, si ricava $P_1 = (-1/(2\sqrt{5} + 2), 1/(2\sqrt{5} - 2))$ e $P_2 = (1/(2\sqrt{5} - 2), -1/(2\sqrt{5} + 2))$. Confrontando i valori della funzione in tali punti, si ottiene

$$f(P_1) = \frac{1}{4(\sqrt{5}+1)^2} - \frac{1}{4(\sqrt{5}-1)^2} - \frac{1}{2(\sqrt{5}+1)} - \frac{1}{2(\sqrt{5}-1)},$$
$$f(P_2) = \frac{1}{4(\sqrt{5}-1)^2} - \frac{1}{4(\sqrt{5}+1)^2} + \frac{1}{2(\sqrt{5}-1)} + \frac{1}{2(\sqrt{5}+1)},$$

da cui segue facilmente che P_1 è punto di minimo assoluto e P_2 è punto di massimo assoluto per f su C.

Esercizio 3

Osserviamo che, ponendo $z = a + ib$, l'equazione proposta si riscrive come $a^2 + b^2 + 3ia - 3b - 6ib = 2$, ovvero

$$\begin{cases} a^2 + b^2 - 3b = 2 \\ 3a - 6b = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} a = 2b \\ 5b^2 - 3b = 2 \end{cases} \implies \begin{array}{l} b = 1 \quad a = 2 \\ b = -2/5 \quad a = -4/5 \end{array}.$$

In conclusione, si ottengono le due soluzioni $z_1 = 2 + i$ e $z_2 = -\frac{4+2i}{5}$.