SOLUZIONI COMPITO INTEGRATIVO

Esercizio 1

Osserviamo che, per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, l'integranda è una funzione continua e positiva in $(0, +\infty)$, e quindi integrabile in senso proprio in ogni intervallo chiuso e limitato della forma $[\delta, M]$, con $0 < \delta < M < +\infty$. Pertanto, per stabilire se l'integrale proposto esiste finito, esso va studiato in un intorno $U(+\infty)$ dell'infinito ed in un intorno destro $U(0^+)$ dell'origine.

In $U(+\infty)$, si ha

$$0 \leq f(x) \sim \frac{1}{x^{6\alpha-5}} \qquad \text{che è integrabile in senso improprio solo per } 6\alpha - 5 > 1,$$

quindi, per il criterio del confronto asintotico, l'integrale esiste finito se $\alpha > 1$, mentre diverge per $\alpha \leq 1$.

In $U(0^+)$, utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al primo ordine per la funzione $x \mapsto \mathrm{e}^x$, si ha

$$0 \leq f(x) \sim \frac{x \cdot x^{5-6\alpha}}{2} = \frac{1}{2x^{6\alpha-6}} \qquad \text{che è integrabile in senso improprio solo per } 6\alpha - 6 < 1,$$

quindi, per il criterio del confronto asintotico, l'integrale esiste finito se $\alpha < 7/6$, mentre diverge per $\alpha \geq 7/6$. In conclusione, l'integrale proposto esiste finito solo per $1 < \alpha < 7/6$.

Esercizio 2

Osserviamo che le soluzioni dell'equazione proposta sono date dall'insieme delle soluzioni delle due equazioni

$$z^4 + 1 = 0 \qquad \text{e} \qquad z^2 + 4i = 0\,.$$

La prima equazione consiste nel determinare le quattro radici quarte di -1, mentre la seconda consiste nel determinare le due radici quadrate di $-4i$; ovvero

$$z = \sqrt[4]{-1} = \sqrt[4]{\mathrm{e}^{i\pi}} = \begin{cases} [\cos(\pi/4) + i\sin(\pi/4)] = (\sqrt{2} + i\sqrt{2})/2 \\ [\cos(3\pi/4) + i\sin(3\pi/4)] = (-\sqrt{2} + i\sqrt{2})/2 \\ [\cos(5\pi/4) + i\sin(5\pi/4)] = (-\sqrt{2} - i\sqrt{2})/2 \\ [\cos(7\pi/4) + i\sin(7\pi/4)] = (\sqrt{2} - i\sqrt{2})/2\,; \end{cases}$$

$$z = \sqrt[2]{-4i} = \sqrt[2]{4\mathrm{e}^{i3\pi/2}} = \begin{cases} 2[\cos(3\pi/4) + i\sin(3\pi/4)] = -\sqrt{2} + i\sqrt{2} \\ 2[\cos(7\pi/4) + i\sin(7\pi/4)] = \sqrt{2} - i\sqrt{2}\,. \end{cases}$$

Esercizio 3

Innanzitutto osserviamo che la funzione proposta, in quanto somma di potenze positive, è continua sull'insieme chiuso e limitato D. Pertanto, grazie al Teorema di Weierstrass, essa ammette almeno un punto di massimo ed un punto di minimo assoluti.

(1) Possiamo parametrizzare l'insieme D ponendo $y = (x-1)^2$ e, sostituendo nell'espressione di f, otteniamo $f(x, (x-1)^2) = 5x^3 - 5x(x^2 - 2x + 1) - 20(x-1) = 10x^2 - 25x + 20 =: g(x)$. La funzione g va ora studiata nell'intervallo $[1, 2]$; derivandola si ricava

$$g'(x) = 20x - 25\,,$$

che è negativa per $x \in [1, 5/4)$, positiva per $x \in (5/4, 2]$ e nulla in $x = 5/4$. Quindi il punto $x = 5/4$ è punto di minimo assoluto, mentre, confrontando i valori di g in $x = 1$ e $x = 2$, si ricava che il punto di massimo assoluto è $x = 2$. Pertanto, per la funzione f, si ottiene che $(x, y) = (5/4, 1/16)$ è punto di minimo assoluto in D e $(x, y) = (2, 1)$ è punto di massimo assoluto in D

(2) Poiché l'insieme D può essere scritto sotto la forma di vincolo $\Gamma = \{g(x, y) = y - (x-1)^2 = 0\}$, con $1 \leq x \leq 2$, introduciamo la Lagrangiana $L(x, y, \lambda)$ associata al problema proposto e data da

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y) = 5x^3 - 5xy - 20\sqrt{y} + \lambda[y - (x-1)^2]\,.$$

Derivando, otteniamo

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 15x^2 - 5y - 2\lambda(x-1) = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = -5x - 10/\sqrt{y} + \lambda = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = y - (x-1)^2 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} y = (x-1)^2 \\ 15x^2 - 5(x-1)^2 - 2\lambda(x-1) = 0 \\ -5x - 10/(x-1) + \lambda = 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} y = (x-1)^2 \\ -5x^2 + 5x - 10 = -\lambda(x-1) \\ 15x^2 - 5(x-1)^2 + 2(-5x^2 + 5x - 10) = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 120x - 25 = 0 \\ -5x^2 + 5x - 10 = -\lambda(x-1) \\ y = (x-1)^2 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x = 5/4 \\ -5 \cdot \dfrac{25}{16} + 5 \cdot \dfrac{5}{4} - 10 = -\lambda\Big(\dfrac{5}{4} - 1\Big) \\ y = \Big(\dfrac{5}{4} - 1\Big)^2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 5/4 \\ \lambda = 185/4 \\ y = 1/16\,. \end{cases}$$

Quindi l'unico punto stazionario è $(5/4, 1/16)$. Poiché, come osservato all'inizio, la funzione ha in D punti di massimo e minimo assoluti, confrontando i valori della funzione in $(5/4, 1/16)$, $(1, 0)$ e $(2, 1)$ (questi ultimi sono i due estremi dell'insieme D), si ottiene, come nel punto precedente, che $(x, y) = (5/4, 1/16)$ è punto di minimo assoluto in D e $(x, y) = (2, 1)$ è punto di massimo assoluto in D.