## Soluzioni gennaio 2016

### Esercizio 1

Il tetraedro in questione è delimitato dai piani coordinati e dal piano $x + y + z = 1$

La superfici conica assegnata interseca il piano $y = 0$ $(z = 0)$ lungo la bisettrice del primo quadrante di tale piano. Essa interseca dunque tali piani secondo due sue generatrici appartenenti a tali piani. Denotiamo poi con $P_x$ $(P_y)$ l'intersezione della generatrice appartenente al piano $y = 0$ $(x = 0)$ con la curva $\gamma$. Si ha $P_x = \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$ , $P_y = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Allora le proiezioni ortogonali $\Pi_{P_x}$ , $\Pi_{P_y}$ di tali punti sul piano $z = 0$ sono rispettivamente $\Pi_{P_x} = \left(\frac{1}{2}, 0, 0\right)$ $e$ $\Pi_{P_y} = \left(0, \frac{1}{2}, 0\right)$.

Inoltre la nostra superficie conica interseca il piano $x + y + z = 1$ lungo una curva $\gamma$ di cui occorre determinare la proiezione ortogonale $\Pi_\gamma$ sul piano $z = 0$ . Per questo basta scrivere l'equazione del cilindro con generatrici parallele all'asse delle $z$ che contiene la stessa curva $\gamma$. Questa equazione si ottiene eliminando la variabile $z$ dal sistema:

$$\begin{cases} z = \sqrt{x^2 + y^2} \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

L'equazione che si ottiene è

$$(*) \quad 2xy - 2x - 2y + 1 = 0.$$

Questo è il cilindro cercato . L'equazione $(*)$, nel piano $z = 0$ , rappresenta la proiezione ortogonale $\Pi_\gamma$ se si limita la variabilità di $x$ , $y$ al seguente modo

$0 \le x \le P_x = \frac{1}{2}$ , $0 \le y \le P_y = \frac{1}{2}$ . In tale insieme l'equazione definisce $y$ come funzione di $x$ secondo la seguente formula:

$$y = \frac{2x-1}{2x-2} = 1 + \frac{1}{2x-2} .$$

La porzione di superficie di cui si vuole calcolare l'area è quella che si proietta ortogonalmente sul seguente dominio $D$ del piano $z = 0$ :

$$D = \left\{ (x, y) \mid \ 0 \le x \le \frac{1}{2} \ , \ 0 \le y \le 1 + \frac{1}{2x-2} \right\}$$

L'area cercata è dunque data da $\iint_D \sqrt{1 + \left(z_x(x,y)\right)^2 + \left(z_y(x,y)\right)^2}\, dxdy$

$$= \iint_D \sqrt{1 + \frac{x^2}{x^2+y^2} + \frac{y^2}{x^2+y^2}}\ dxdy = \iint_D \sqrt{2}dxdy = \sqrt{2} \int_0^{\frac{1}{2}} dx \int_0^{1+\frac{1}{2x-2}} dy =$$

$$= \sqrt{2} \int_0^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{1}{2x-2}\right) dx = \sqrt{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} log2\right) = \frac{1-log2}{\sqrt{2}}$$

## Esercizio 2

L'equazione differenziale è di tipo Bernoulli . In un intorno del punto iniziale $(0\,,1)$ la soluzione $y(x)$ del dato problema di Cauchy è positiva. Pertanto si può introdurre la sostituzione $u(x) = \sqrt{y(x)}$ che muta il problema assegnato nel seguente problema per un'equazione lineare:

$$u\acute{(}x) + u(x) \cdot tgx = -\frac{1}{2}\, cosx \quad , \quad u(0) = 1$$

La soluzione di quest'ultimo è $u(x) = cosx\, \left(1 - \frac{1}{2}x\right)$ e quindi la soluzione del problema posto è

$$y(x) = cos^2x\, \left(1 - \frac{1}{2}x\right)^2 .$$

## Esercizio 3

Si tratta di una serie di soli seni in cui $b_k = \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{k^2} sink\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2k} coskπ\right)$

## Esercizio 4

La lagrangiana del problema è

$$L(x, y, z, \lambda, \mu) = 4 - z - \lambda(x^2 + y^2 - 8) - \mu(x + y + z - 1) .$$

Si debbono risolvere le equazioni

$$(*) \quad -2\lambda x - \mu = 0 \;, -2\lambda y - \mu = 0\,, \; -1 - \mu = 0 \;\;, x^2 + y^2 - 8 = 0\,, x + y + z - 1 = 0$$

Da queste si trae $\mu = -1\,,\; 2\lambda x = 1\;\;, 2\lambda y = 1\;\; con\;\; \lambda \neq 0.$

Dalla quarta delle $(*)$ si ricava dunque $x = y = \frac{1}{2\lambda} \to \frac{1}{4\lambda^2} + \frac{1}{4\lambda^2} - 8 = 0 \;\to |x| = \;|y| = 2$

Ponendo i relativi valori di $x\,, y$ nella quinta delle equazioni $(*)$ si vede che $Max = 7, Min = -1$.

## Esercizio 5

Il campo di definizione della forma è il semipiano $y > 0$ che è un aperto semplicemente connesso .

In tale campo è soddisfatta la "condizione di chiusura"

$$\frac{\partial}{\partial y}(\sqrt{y} - 2xy) = \frac{1}{2\sqrt{y}} - 2x = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{2\sqrt{y}} - x^2\right)$$

La forma è dunque esatta in tutto il semipiano $y > 0$.

La primitiva cercata è $U(x, y) = x\sqrt{y} - x^2y + 1$.

## Esercizio 6

Il solido V che si ottiene con tale rotazione , utilizzando le coordinate cilindriche $\rho, \varphi, z$ è definito al seguente modo

V=$\left\{\rho, \varphi, z \;\middle|\; \rho > 0,\;\; 0 \le z \le e^{-\rho^2}, 0 \le \varphi \le 2\pi\right\}$

L'elemento di volume è $dV = \rho d\rho d\varphi dz$

Il momento d'inerzia cercato è dunque $I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{+\infty} \rho^3 d\,\rho \int_0^{e^{-\rho^2}} dz = 2\pi \int_0^{+\infty} \rho^3 e^{-\rho^2}\, d\rho$ =

Per il calcolo dell'ultimo integrale si procede per parti al seguente modo:

$$\int_0^{+\infty} \rho^3 e^{-\rho^2}\, d\rho = \int_0^{+\infty} \rho^2 \rho e^{-\rho^2} d\rho = -\frac{1}{2}\rho^2 e^{-\rho^2}\Big]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{1}{2} e^{-\rho^2} 2\rho d\rho = -\frac{1}{2} e^{-\rho^2}\Big]_0^{+\infty} = \frac{1}{2}$$

Pertanto $I = \pi$