Soluzioni esercizi esame analisi II Energetica del 14/09/2015

Esercizio 1.

Per il generico punto (x,y,z) della curva si ha $z=2y$. Pertanto la curva sta sul piano $z=2y$. Più precisamente si può osservare che essa è l'ellisse segata da tale piano sul cilindro $x^2+y^2=1$.

Per il raggio di curvatura si introduce il vettore $\vec{r}'(\theta)$, col suo versore $\hat{r}'(\theta)$, e il vettore $\vec{r}''(\theta)$.

Si ha

$$\vec{r}'(\theta)=(-sin\theta, cos\theta, \quad 2cos\theta)\,, \qquad \hat{r}'(\theta)=\frac{1}{\sqrt{1+4cos^2\theta}}(-sin\theta, cos\theta, 2cos\theta).$$

$$\vec{r}''(\theta)=(-cos\theta, -sin\theta, -2sin\theta)$$

In tutti i punti in cui $|\vec{r}'(\theta)\wedge\vec{r}''(\theta)|\neq 0$ il raggio di curvatura è $\rho(\theta)=|\vec{r}'(\theta)|^3/|\vec{r}'(\theta)\wedge\vec{r}''(\theta)|$. Il valore del parametro θ che compete al punto $(0,1,2)$ è $\theta=\pi/2$ in corrispondenza al quale, a conti fatti, si ha

$$\rho\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Quanto al centro di curvatura indichiamolo con $C=(x_c, y_c, z_c)$ e osserviamo che il vettore della normale principale, che si ottiene derivando il versore $\hat{r}'(\theta)$, è uguale a :

$$\vec{n}(\theta)=\frac{1}{[1+4cos^2\theta]^{1/2}}(-cos\theta, -sin\theta, -2cos\theta)-\frac{4cos\theta sin\theta}{\sqrt{1+4co^2\theta}}(-sin\theta, cos\theta, 2cos\theta).$$

Nel punto $(0,1,2)$ si ha

$$\vec{n}\left(\frac{\pi}{2}\right)=(0,-1,-2)\,, \qquad \hat{n}\left(\frac{\pi}{2}\right)=\left(0,-\frac{1}{\sqrt{5}},-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$

Quindi

$$x_c=0-\frac{0}{\rho\sqrt{5}}=0 \quad , \quad y_c=1-\frac{1}{\rho\sqrt{5}}=\frac{4}{5}\,, \qquad z_c=2-\frac{2}{\rho\sqrt{5}}=\frac{8}{5}$$

Esercizio 2

Indichiamo con $P=(x,y,z)$ il generico punto della porzione di superficie Σ . Indichiamo poi con Φ l'angolo diedro che il piano passante per l'asse z e per il punto P forma col piano $y=0$.

Il cilindro che contiene Σ è rappresentato dalle equazioni parametriche

$x = 2sin\phi cos\phi$, $y = 2sin^2\phi$, $z = z$

e dunque l'elemento d'area è dato da $d\sigma = \sqrt{4cos^2(2\phi) + 4sin^2(2\phi)}\, d\phi dz = 2d\phi dz$

La porzione Σ è descritta da tali equazioni limitatamente alle seguenti limitazioni dei parametri ϕ, z

$\phi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $-2cos\phi \leq z \leq 2cos\phi$. Indicato allora con I l'integrale da calcolare si ha

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2d\phi \int_{-2cos\phi}^{2cos\phi} z^2 dz = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\phi \int_0^{2cos\phi} z^2 dz = \frac{4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 8cos^3\phi \, d\phi = \frac{32}{3}\left[1 - \frac{1}{3}\right] = \frac{64}{9}$$

Esercizio 3

La funzione è pari e quindi per i coefficienti della serie di Fourier si ha

$$b_k = 0 \ per\ k = 1,2,\dots \qquad a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{cos x}{2} coskx\, dx = -\frac{4}{\pi}\,\frac{(-1)^k}{(4k^2-1)} \ per\ k = 0,1,2,\dots.$$

La serie di Fourier è dunque data da :

$$\frac{a_0}{2} + \sum_1^{\infty} a_k coskx = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_1^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{4k^2-1} coskx$$

Esercizio 4

La forma è chiusa in quanto $\frac{\partial}{\partial y}(2xsiny + y^2 sinx) = 2xcosy + 2ysinx = \frac{\partial}{\partial x}(x^2cosy - 2ycosx)$.

Tale identità è soddisfatta in tutto R^2 e dunque la forma è esatta in R^2. Una generica primitiva è del tipo

$U(x,y) = x^2 siny - y^2 cosx + g(y)$

In cui $g(y)$è un'arbitraria funzione di classe $C^1(R^1)$ della variabile y . Calcolando $la\ derivata\ \frac{\partial}{\partial y}U(x,y)$

ed imponendo l'identità $\frac{\partial}{\partial y}U(x,y) = x^2cosy - 2ycosx,$ si ricava $\acute{g}(y) = 0$

e quindi la generica primitiva è

$U(x,y) = x^2 siny - y^2 cosx + c$, in cui c denota una costante reale arbitraria.

La condizione $U(0,1) = 0$ è poi soddisfatta scegliendo $c = 1$.

Esercizio 5

L'integrale da calcolare è $I = \int_0^1 x\sqrt{1+x^4}\,dx$. Con la sostituzione $u = x^2$ l'integrale diventa: $I = \frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{1+u^2}\,du$. Integrando per parti si ottiene:

$$I = \frac{1}{2}u\sqrt{1+u^2}\Big]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{u^2}{\sqrt{1+u^2}}du = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{u^2+1-1}{\sqrt{1+u^2}}du = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{1+u^2}\,du + \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}du$$

Si ha dunque

$$2I = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}du = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\log\left(u+\sqrt{1+u^2}\right)\Big]_0^1\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}log(1+\sqrt{2})\right)$$

Quindi $I = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}log(1+\sqrt{2})\right)$.

Esercizio 6

Il massimo esiste come assicurato dal teorema di Weierstrass.

Le estremali interne coincidono con le soluzioni delle equazioni

$$2xy^2z^2 = x^2 2yz^2 = x^2y^2 2z = 0 \quad ,$$

ossia con la totalità dei punti che appartengono ai piani coordinati. Ma in ciascuno di tali punti la funzione assegnata assume il valore 0 che è il suo minimo assoluto e non il massimo. Il massimo va dunque cercato sulla frontiera della palla. Applicando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange si vede che esso va cercato nei punti che soddisfano il sistema di equazioni

$$2xy^2z^2 - 2\lambda x = 0 \;, 2yx^2z^2 - 2\lambda y = 0, \qquad 2zx^2y^2 - 2\lambda z = 0, x^2+y^2+z^2 = 1$$

Da tali equazioni , tenuto conto che nessuna delle variabili x, y, z, λ può assumere il valore 0 , si vede che il massimo è assunto in quei punti di frontiera in cui $x^2 = y^2 = z^2$. Quindi necessariamente tale valore comune vale $\frac{1}{3}$ ed il massimo cercato vale $\frac{1}{27}$.