Soluzioni prova del 03/11/2015

Esercizio 1

Si ha una serie di soli coseni in cui conviene calcolare a parte i primi due termini a_0 e a_1

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} xcosxdx = \frac{2}{\pi}\{xsinx]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} sinxdx\} = \frac{2}{\pi}cosx]_0^{\pi} = -\frac{4}{\pi}$$

$$a_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} xcos^2xdx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\frac{1+cos2x}{2}dx = \frac{2}{\pi}\left\{\frac{x^2}{4}\right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\frac{xcos2x}{2}dx\right\} = \frac{2}{\pi}\left\{\frac{\pi^2}{4} + 0\right\} = \frac{\pi}{2}$$

Usando poi la formula di prostaferesi $\quad 2cosx \cdot coskx = cos(k+1)x + cos(k-1)x$

si ottiene

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} xcosx\ coskx\ dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x \cdot cos(k+1)x + x \cdot cos(k-1)x\ dx$$

Integrando 2 volte per parti si ricava :

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left\{\frac{1}{(k+1)^2}cos(k+1)x]_0^{\pi} - \frac{1}{(k-1)^2}cos(k-1)x]_0^{\pi}\right\}$$

Ossia , per ogni $k \geq 2$,

$$a_k = \frac{1}{\pi}\frac{2(k^2+1)}{(k^2-1)^2}\ [(-1)^{k+1} - 1]\ .$$

Per la serie cercata si ha dunque lo sviluppo:

$$-\frac{2}{\pi} + \frac{\pi}{2}cosx + \sum_2^{\infty}\frac{1}{\pi}\frac{2(k^2+1)}{(k^2-1)^2}\ [(-1)^{k-1} - 1]\ coskx$$

Esercizio2

Il punto $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ si ottiene dalle equazioni parametriche per il valore $t = \frac{1}{2}$ del parametro.

Derivando rispetto a t si ottengono anche le seguenti equazioni, valide $\forall t \epsilon \left[\frac{1}{10}\ ,\ \frac{9}{10}\right]$

$$\acute{x}(t) = \frac{1-2t}{2\sqrt{t-t^2}}\ ,\quad \acute{y}(t) = 1\quad ,\quad \acute{z}(t) = 1\ .$$

$Il\ modulo\ del\ vettore\ tangente$ è $|T(t)| = \sqrt{\left(\acute{x}(t)\right)^2 + 1 + 1} = \sqrt{1 + 4(t - t^2)}$

Il versore tangente alla curva è dunque dato da $\vec{\tau}(t) = \left(\frac{1-2t}{\sqrt{1+4(t-t^2)}}, \frac{2\sqrt{t-t^2}}{\sqrt{1+4(t-t^2)}}, \frac{2\sqrt{t-t^2}}{\sqrt{1+4(t-t^2)}}\right)$

Derivando ancora rispetto a t si ottiene il vettore normale

$$\vec{n}(t) = \left(\frac{-4}{(1+4(t-t^2))^{\frac{3}{2}}}\ ,\ \frac{1-2t}{(1+4(t-t^2))^{\frac{3}{2}}\sqrt{t-t^2}}\ ,\frac{1-2t}{(1+4(t-t^2))^{\frac{3}{2}}\sqrt{t-t^2}}\right)$$

In particolare, nel punto $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right), ossia\ per\ t = \frac{1}{2}$, si ha $\quad \vec{n}(\frac{1}{2}) = \left(-\sqrt{2}\ ,\ 0\ ,\ 0\right)$.

Il modulo della curvatura è $k = \frac{\left|\vec{n}\left(\frac{1}{2}\right)\right|}{\left|T\left(\frac{1}{2}\right)\right|} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1$. quindi il raggio di curvatura richiesto è $\rho = 1$

Esercizio 3

Il campo di definizione è il semipiano aperto $y > 0$ che è un campo semplicemente connesso.

In tale campo la forma è chiusa in quanto:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(logy + \frac{y}{x^2+y^2}\right) = \frac{1}{y} + \frac{x^2+y^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{1}{y} + \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{y} - \frac{x}{x^2+y^2}\right) = \frac{1}{y} - \frac{x^2-y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{1}{y} + \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

Per quanto riguarda la primitiva $U(x,y)$ si ha

$$U(x,y) = xlogy + arctg\frac{x}{y} + g(y)$$

Derivando rispetto ad y e confrontando il risultato con $\left(\frac{x}{y} - \frac{x}{x^2+y^2}\right)$ si vede che deve essere sodisfatta la condizione $\acute{g}(y) = 0$ ossia $g(y) = costante = c$. Tenuto infine conto della condizione $U(1,1) = 0$ si vede che $c = 0$ e quindi la primitiva richiesta è

$$U(x,y) = xlogy + arctg\frac{x}{y} - \frac{\pi}{4}$$

Esercizio 4

Denotiamo con Σ la superficie in questionee. Consideriamone l'ottava parte che denoteremo Σ^+, che è quella contenuta nell'ottante $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$. Questa parte consta a sua volta di due parti Σ_1^+, Σ_2^+ dove

$$\Sigma_1^+ = \left\{(x,y,z)\ tali\ che\ x \geq 0, y \geq 0\,, x^2 + y^2 \leq 1,\ \ z = \sqrt{1-x^2}\right\}$$

$$\Sigma_2^+ = \left\{(x,y,z)\ tali\ che\ x \geq 0, y \geq 0\,, x^2 + z^2 \leq 1,\ \ y = \sqrt{1-z^2}\right\}$$

Le due superficie Σ_1^+, Σ_2^+ hanno la stessa area . Calcoliamo , per fissare le idee, l'area di Σ_1^+.

$$Area(\Sigma_1^+) = \int_0^1 dx \int_{y=0}^{y=\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial}{\partial x}\sqrt{1-x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y}\sqrt{1-x^2}\right)^2}\, dy$$

$$= \int_0^1 dx \int_{y=0}^{y=\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial}{\partial x}\sqrt{1-x^2}\right)^2 + 0}\ dy$$

$$Area(\Sigma_1^+) = \int_0^1 dx \int_{y=0}^{y=\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1 + \left(\frac{x}{1-x^2}\right)^2}\, dy = \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dy = 1$$

Dunque si ha $\quad Area(\Sigma) = 8(1+1) = 16.$

Esercizio 5

La superficie S consta della porzione della superficie cilindrica $x^2 + y^2 = 1$compresa tra i due piani

$z = 0$, $z = 2$ ed i due cerchi di raggio 1 intersezioni di tali piani col cilindro $x^2 + y^2 \leq 1$

Indicando con C il cilindro delimitato dalla superficie S e applicando il teorema della divergenza si ha.

$$\oiint_S \underline{F} \cdot \underline{d\sigma} = \iiint_C div(\underline{F})dV = \iiint_C \left(2x^2 + 2y^2 + 2z(x^2+y^2)\right) dxdydz$$

Usando le coordinata cilindriche si ha poi

$$\iiint_C \left(2y^2 + 2x^2 + 2z(x^2 + y^2)\right)\ dxdydz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 2\rho^2 \rho d\rho \int_0^2 (1+z)dz = 8\pi$$

Quindi $\oiint_S \ \underline{F} \cdot \underline{d\sigma} = 8\pi$

Esercizio 6

La superficie considerata è un insieme chiuso e limitato di R^3 e la funzione $F(x,y,z) = xyz$ è continua in tutto R^3. Il teorema di Weierstrass assicura dunque l'esistenza del massimo e minimo richiesti. Per calcolarli si può usare il metodo dei moltiplicatori di Lagrange.

Introdotta la Lagrangiana

$$L(x,y,z) = xyz - \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 12)$$

Si ottengono le equazioni :

$$yz - 2\lambda x = 0\ ,\ \ xz - 2\lambda y = 0\ \ ,\ \ xy - 2\lambda z = 0\ \ ,\ \ x^2 + y^2 + z^2 - 12 = 0$$

Dalle prime tre equazioni si ricava

$$* \quad 2\lambda x^2 = 2\lambda y^2 = 2\lambda z^2\ .$$

Osserviamo che al valore zero di λ corrisponde il valore zero di xyz. Tale valore e non è né di massimo né di minimo visto che sulla superficie sferica si ha ad esempio $F\left(1,1,\sqrt{10}\right) = \sqrt{10}\ ,\ F\left(-1\,,1\,,\sqrt{10}\right) = -\sqrt{10}$ Pertanto i due estremali richiesti corrispondono ad un valore non nullo di λ . Dalle equazioni $*$ segue allora che nei due estremali si ha

$$** \qquad x^2 = y^2 = z^2$$

Ossia $3x^2 = 12\ \rightarrow |x| = 2\ \rightarrow Max = 8\ ,\ Min = -8.$