Soluzione esercizi

Esercizio 1

La porzione di superficie Σ è il grafico della funzione $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ relativa al dominio D del piano xy definito dalla disuguaglianza : $x^2 + y^2 \leq 1$. L'area cercata è data da

$$A = \iint_D 2(x^2 + y^2)\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\ dxdy = \iint_D 2(x^2 + y^2)\sqrt{2}\, dxdy.$$

Passando a coordinate polari piane ρ , φ si ottiene $A = 2\sqrt{2}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho^2 \rho d\rho = \sqrt{2}\pi$

Esercizio 2

Le equazioni parametriche esplicite dell'assegnata curva, rispetto al parametro φ , sono date da :

$x = cos\varphi + cos^2\varphi$, $y = sin\varphi + cos\varphi\ sin\varphi.$

Il punto in questione $(x_0, y_0) = (0\,, 1)$, si ottiene con il valore $\varphi = \frac{\pi}{2}$. In corrispondenza a tale valore si ha anche $(\dot{x}_0\,, \dot{y}_0) = (-1\,, -1)$, $(\ddot{x}_0, \ddot{y}_0) = (2\,, -1).$

Dove si è posto:

$\dot{x}_0 = \frac{dx}{d\varphi}\left(\frac{\pi}{2}\right)$, $\ddot{x}_0 = \frac{d^2x}{d\varphi^2}\left(\frac{\pi}{2}\right)$ $\dot{y}_0 = \frac{dy}{d\varphi}\left(\frac{\pi}{2}\right)$, $\ddot{y}_0 = \frac{d^2y}{d\varphi^2}\left(\frac{\pi}{2}\right)$. Si vede che $(\dot{x}_0\ddot{y}_0 - \ddot{x}_0\dot{y}_0) = 3$

Per il centro di curvatura (x_c, y_c) *si applicano allora le formule* :

$$x_c = x_0 - \dot{y}_0 \frac{(\dot{x}_0)^2 + (\dot{y}_0)^2}{(\dot{x}_0\ddot{y}_0 - \ddot{x}_0\dot{y}_0)}\ , y_c = y_0 + \dot{x}_0 \frac{(\dot{x}_0)^2 + (\dot{y}_0)^2}{(\dot{x}_0\ddot{y}_0 - \ddot{x}_0\dot{y}_0)}$$

Nel nostro caso si ottiene dunque $x_c = \frac{2}{3}$, $y_c = \frac{1}{3}$.

Esercizio 3

Il rapporto incrementale relativo ad una arbitraria direzione $(\alpha\,, \beta)$, *nel punto* $(0\,, 0)$ vale a dire *il rapporto* $\frac{F(0+\alpha t, 0+\beta t) - F(0\,,0)}{t}$ nel caso in esame è dato da : $\frac{\sqrt{|\alpha t\ \beta t|}}{t} = \frac{|t|}{t}\sqrt{|\alpha\beta|}$.

Tale *formula* è *ben definita per ogni valore* $\neq 0$ *del parametro reale* t .

Il limite per $t \to 0$ di $\frac{|t|}{t}\sqrt{|\alpha\beta|}$ esiste però se e solo se $|\alpha\beta| = 0$, nel qual caso esso vale 0.

In conclusione le uniche derivate direzionali che esistono nel punto $(0\,, 0)$ per la funzione in esame sono le due derivate parziali rispetto alle variabili x (*corrispondente a* $\beta = 0$), *ed* y (*corrispondente ad* $\alpha = 0$) che valgono entrambe zero.

Esercizio 4

Indicando con A il solido di cui si vuole calcolare il volume , si vede che esso può essere rappresentato dal sistema di coordinate ρ , φ , y legate alle coordinate cartesiane x , y , z dalle relazioni:

(☼) $x = \rho cos\varphi$, $z = \rho sin\varphi$, $y = y$

In cui ρ rappresenta la distanza del punto (x , y , z) dall'asse di rotazione (asse y) e φ è l'angolo diedero che il piano passante per il punto (x , y , z) e per l'asse di rotazione forma con il piano $x\ y$.

Usando tali coordinate (ρ , φ , y) si vede che il solido A è caratterizzato al seguente modo

$$A = \tilde{A} = \left\{ (\rho , \varphi , y) : \rho \epsilon [0, \pi] \;\; \varphi \epsilon [0, 2\pi] \;\; y \epsilon \left[0 , \frac{sin\rho}{\rho}\right] \right\} .$$

Tenuto conto di ciò e della trasformazione di coordinate ☼ si ottiene:

$$V = vol\,(A) = \iiint_A \, dxdydz = \iiint_{\tilde{A}} \, \rho \, d\rho \, d\varphi \, dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \, \int_0^{\pi} \rho d\rho \int_0^{\frac{sin\rho}{\rho}} dy$$

Pertanto

$$V = 2\pi \int_0^{\pi} \frac{sin\rho}{\rho} \, \rho d\rho = 2\pi \int_0^{\pi} sin\rho \, d\rho = 4\pi$$

Esercizio 5

La forma differenziale lineare ω soddisfa le condizioni di chiusura in $R^2 \setminus \{(0 , 0)\}$ in quanto , in tale insieme si ha

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x-y}{x^2+y^2}\right) = \frac{y^2-x^2-2xy}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x+y}{x^2+y^2}\right)$$

Per quanto riguarda il primo dei due integrali curvilinei proposti si ha

$$\oint_{+\Gamma^1} \omega = \int_0^{2\pi} [(cos\varphi - sin\varphi)(-sin\varphi) + (cos\varphi + sin\varphi)(cos\varphi)] \, d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi$$

Per quanto riguarda il secondo integrale si vede che la curva semplice e chiusa $+\Gamma^2$ è la completa frontiera di un dominio regolare limitato (il dominio chiuso E di forma ellittica che ha per contorno $+\Gamma^2$) contenuto nel campo di regolarità di ω . Dal teorema di Gauss−Green segue allora

$$\iint_E \left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x-y}{x^2+y^2}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x+y}{x^2+y^2}\right)\right] dxdy = -\oint_{+\Gamma^2} \left(\frac{x-y}{x^2+y^2}\right) dx + \left(\frac{x+y}{x^2+y^2}\right) dy = -\oint_{+\Gamma^2} \omega$$

L'integrale doppio della precedente formula, vista la chiusura di ω, è zero; quindi anche $\oint_{+\Gamma^2} \omega = 0$

Esercizio 6

Si tratta di una serie di soli seni i cui coefficienti sono $b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (\pi x - x^2) \sin kx \, dx$.

Si ha poi : $\int_0^{\pi} (\pi x - x^2) sinkxdx = -\frac{1}{k} cokx(\pi x - x^2)_0^{\pi} + \frac{1}{k} \int_0^{\pi} coskx(\pi - 2x)dx =$

$$= \frac{1}{k} \int_0^\pi coskx(\pi - 2x)dx = \frac{1}{k^2} sinkx(\pi - 2x)_0^\pi - \frac{1}{k^2} \int_0^\pi sinkx(-2)dx =$$

$$= \frac{2}{k^2} \int_0^\pi sinkxdx = -\frac{2}{k^3}(coskx)_0^\pi = \begin{cases} 0 & se\ k \text{ è } pari \\ \frac{4}{k^3} & se\ k \text{ è } dispari \end{cases}$$

Pertanto $\quad b_k = \begin{cases} 0 & se \quad k \text{ è } pari \\ \frac{8}{\pi k^3} & se\ k \text{ è } dispari \end{cases}$ $\quad$ e la serie cercata è

$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{8}{\pi(2j+1)^3} \, sin(2j+1)x$.