Soluzioni febbraio 2016

Esercizio 1

La curva è tracciata sul piano $y+z=4$. Le equazioni parametriche sono definite da funzioni di classe C^{∞} su tutto R. Inoltre, derivando rispetto a t, si ha

$(*)\quad \acute{x}(t) = -\sqrt{2}sint\,,\ \acute{y}(t) = -cost\,,\ \acute{z}(t) = cost$

Da cui segue $\acute{x(t)}^2 + \acute{y}(t)^2 + \acute{z}(t)^2 = 2 > 0\,, \forall t \in R$.

Indicando con $\hat{\tau}(t), \hat{n}(t), \hat{b}(t)$ i versori tangente, normale principale e binormale si ha:

$\hat{\tau}(t) = \left(-sint, -\frac{cost}{\sqrt{2}}, \frac{cost}{\sqrt{2}}\right)\,,\ \hat{n}(t) = \left(-cost, \frac{sint}{\sqrt{2}}, -\frac{sint}{\sqrt{2}}\right)\,,\ \hat{b}(t) = \left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

Indicando con $\bar{\acute{r}}(t)$ il vettore tangente, con le componenti $(*)$,

E la curvatura è data da $k(t) = \frac{1}{|\bar{\acute{r}}(t)|}\left|\frac{d}{dt}\hat{\tau}(t)\right| = \frac{1}{\sqrt{2}}\quad \forall\, t \epsilon R$

Il raggio di curvatura è $\rho = \sqrt{2}$ ed il centro ha le coordinate

$x_c = 2 + \sqrt{2}cost - cost\sqrt{2}\ \ , y_c = 1 - sint + \frac{sint}{\sqrt{2}}\sqrt{2}\ , z_c = 3 + sint - \frac{sint}{\sqrt{2}}\sqrt{2}\ ,$

Ossia $x_c = 2\,, y_c = 1, z_c = 3$

Esercizio 2

Indichiamo con V il solido omogeneo ottenuto con la rotazione del dominio D. Il suo baricentro

sta sull'asse delle y e la sua ordinata è , $y_G = \frac{1}{vol(V)}\iiint_V\ ydxdydz$

Usando coordinate cilindriche ρ, φ, y si vede che il solido è definito al seguente modo:

$V = \left\{(\rho, \varphi, y) \colon \varphi \epsilon [0, 2\pi], y \epsilon \left[0, \frac{1}{\rho}\right], \rho \epsilon [1,2]\right\}$

Ne segue

$vol(V) = 2\pi \int_1^2 \rho d\rho \int_0^{\frac{1}{\rho}} dy = 2\pi$, quindi $y_G = \frac{1}{2\pi} 2\pi \int_1^2 \rho d\rho \int_0^{\frac{1}{\rho}} ydy = \frac{1}{2}log2$

Esercizio3

L'equazione differenziale che compare nel problema è di tipo Bernoulli . Con la sostituzione $u(x) = \frac{1}{y(x)^2}$

Si ottiene l'equazione differenziale lineare $\frac{d}{dx}u(x) - \frac{1}{x}u(x) = 2x^2$ che ha la soluzione generale

$u(x) = x^3 + cx$ dove c denota una costante. Il dato iniziale $y(1) = \frac{1}{2}$ implica c=3 . quindi la soluzione cercata è $y(x) = \frac{1}{\sqrt{x^3+3x}}$.

Esercizio 4

Si vede che $\frac{\partial}{\partial z}(2x + y^2 + 2sin(xy + z) - 3) = 2\cos(xy + z)$. Tale funzione, nel punto soluzione, vale 2>0. Inoltre la funzione $2x + y^2 + 2sin(xy + z) - 3$ è $di\ classe\ \ C^{\infty} in\ R^3$. Il teorema della funzione implicita assicura che la data equazione, in un intorno di P_0 definisce implicitamente $z\ come\ funzione\ \ di\ (x, y)$. Indicando inoltre con $z = F(x, y)$ tale funzione , in un intorno di $(1, -1)$ si ha $F_x\,(x, y) = \frac{1}{2\cos(xy+z)}[2 + 2cos(xy + z)y]$; $F_y\,(x, y) = \frac{1}{2\cos(xy+z)}[2y + 2cos(xy + z)x]$; si vede dunque che , in particolare, $F_x\,(1, -1) = F_y(1, -1) = 0$. Quindi $(1, -1)$ è un punto stazionario per $F(x, y)$.

Esercizio 5

Chiamiamo S la porzione di superficie conica in questione. Indichiamo anche con Σ la porzione della sfera di centro (0,0,0), raggio $R = \sqrt{2}$, colatitudine θ variabile in $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, $e\ longitudine\ \varphi\ in\ [0.2\pi]$. L'unione di tali due superficie è la completa frontiera di un settore sferico solido V. La divergenza del campo vettoriale assegnato $\vec{F}$ vale $4\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Per il teorema della divergenza si ha :

$$(*)\quad \iiint_V\ div\ \vec{F} dV = \iint_S\ \vec{F} \cdot \vec{n}_S ds + \iint_\Sigma\ \vec{F} \cdot \vec{n}_\Sigma d\Sigma$$

Dove $\vec{n}_S\ \vec{n}_\Sigma$, sono i versori normali esterni ad S e Σ rispettivamente. In particolare ricordiamo che il versore normale $\vec{n}_\Sigma$ nel generico punto di Σ di coordinate cartesiane (x, y, z), è $\vec{n}_\Sigma = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)$. E Quindi su tale superficie si ha

$$\vec{F} \cdot \vec{n}_\Sigma = x^2 + y^2 + z^2 = R^2 = 2$$

Usando le coordinate polari sferiche $\varrho\,, \theta, \varphi$ si ottiene poi :

$$(**)\ \iiint_V\ div\ \vec{F} dV = \int_0^{\sqrt{2}} 4\rho^3 d\varrho \int_0^{\frac{\pi}{4}} sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = 8\pi\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$(**)'\ \iint_\Sigma\ \vec{F} \cdot \vec{n}_\Sigma d\Sigma = \iint_\Sigma\ R^2 d\ \Sigma = \iint_\Sigma\ R^2 R^2 sin\theta d\theta d\varphi\ = 4 \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{4}} sin\theta d = 8\pi\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Da $(*), (**), (***)'$ si vede che il flusso $\iint_S\ \vec{F} \cdot \vec{n}_S ds$ uscente dalla superficie conica vale 0.

Esercizio 6

I punti critici di $f(x, y)$ sono $P_0 = (0,0), P_{1=}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), P_{2=}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right), P_3 = \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), P_4 = \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$

I valori assunti dalla funzione su tali punti sono $0, \frac{1}{2}e^{-1}, -\frac{1}{2}e^{-1}, -\frac{1}{2}e^{-1}, \frac{1}{2}e^{-1.}$ Inoltre si vede che

$\lim_{(x^2+y^2)\to+\infty} f(x, y) = 0$. Pertanto esiste un $\rho > 0$ tale che in ogni punto (x, y)per il quale

$\sqrt{x^2 + y^2} \geq \rho$, deve essere $|f(x, y)| < \frac{1}{2}e^{-1}$. La distanza dei 5 punti critici dall'origine è ≤ 1. Ne segue che tale ρ è senz'altro maggiore di 1. In ogni caso si vede che

$sup_{R^2}|f(x, y)| = max_{C_{0,\rho}}|f(x, y)|$ dove $C_{0,\rho}$ denota il cerchio chiuso di centro $(0,0)$ e raggio ρ.

Pertanto $\max f(x, y) = \frac{1}{2}e^{-1}$; $\min f(x, y) = -\frac{1}{2}e^{-1}$.