

Corso di Laurea in Ingegneria Energetica
Esercizi proposti di Analisi Matematica I - Decima Settimana
Funzioni integrali ed integrali impropri

1. Determinare i valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ per i quali è continua la seguente funzione:

$$f(x) = \begin{cases} e^{4(x-1)} & x < 1 \\ \frac{\sqrt[3]{\log x + \alpha}}{x} & x \geq 1. \end{cases}$$

Per tali valori di α determinare inoltre tutte le primitive di f .

2. Sia

$$g(x) = \begin{cases} 1 & x < 1 \\ 5 & x = 1 \\ -2x & x > 1. \end{cases}$$

Calcolare e disegnare il grafico della seguente funzione integrale:

$$f(x) = \int_0^x g(t) dt.$$

3. Determinare gli intervalli di invertibilità della seguente funzione:

$$f(x) = \int_1^x \left(\frac{e^t (e^{2t} - 3e^t + 8)}{\arctan t - \frac{\pi}{2}} \right)^3 dt$$

e calcolare $(f^{-1})'(0)$.

4. Determinare il carattere dei seguenti integrali impropri:

(a) $\int_1^{+\infty} \left(e^{\frac{5}{x^2}} - e^{-\frac{1}{2x}} \right)^2 dx$

(b) $\int_{\frac{1}{4}}^1 \frac{dx}{\sqrt{2-x-\sqrt{x}}}$

(c) $\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}{|1-\sqrt{x^3}|^\alpha (1+x^\alpha)} dx$ al variare di $\alpha > 0$

(d) $\int_1^{10} \left(\frac{\sin(x-1)}{(x-1)^\alpha} + \frac{x}{(\log x)^{2-\alpha}} \right) dx$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

5. Determinare, senza calcolare l'integrale, se la seguente funzione:

$$f(x) = \int_3^x \left(\frac{t^2}{t^2 - 4} - 1 \right) dt$$

ammette asintoti. In caso affermativo, scriverne poi l'equazione esplicita.