TEOREMI DIMOSTRATI NEL CORSO

1. *Successioni e serie numeriche.*

Teorema 1.1 *(Unicità del limite) Sia* $(a_n)_{n\in I\!N}$ *una successione di numeri reali convergente. Allora il suo limite è unico.*

Dim. Assumiamo per assurdo che

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = l_1 \qquad \text{e} \qquad \lim_{n\to+\infty} a_n = l_2$$

con $l_1 \neq l_2$. Dalla definizione di successione convergente si ha che

$$\begin{aligned} &\forall\varepsilon > 0 \;\; \exists\, n_1(\varepsilon) \in I\!N \;\; \text{t.c.} \;\; \forall n \geq n_1 \;\; \text{si ha che} \;\; |a_n - l_1| < \varepsilon\ ; \\ &\forall\varepsilon > 0 \;\; \exists\, n_2(\varepsilon) \in I\!N \;\; \text{t.c.} \;\; \forall n \geq n_2 \;\; \text{si ha che} \;\; |a_n - l_2| < \varepsilon\ . \end{aligned} \tag{1.1}$$

Scegliamo $\varepsilon = \frac{1}{3}|l_1 - l_2| > 0$ e sia $n_0 = \max(n_1, n_2)$, ove n_1 ed n_2 sono gli indici corrispondenti all'ε scelto, dati dalla definizione appena ricordata. Dalla (1.1) si ha che per ogni $n \geq n_0$, $|a_n - l_1| < \varepsilon$ e $|a_n - l_2| < \varepsilon$. Utilizzando la disuguaglianza triangolare, si ottiene che, per ogni $n \geq n_0$,

$$|l_1 - l_2| \leq |a_n - l_1| + |a_n - l_2| < 2\varepsilon = \frac{2}{3}|l_1 - l_2|.$$

Poiché ciò è assurdo, ne segue la tesi.

La precedente dimostrazione si può rileggere anche in termini di intorni come segue.

Assumiamo per assurdo che

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = l_1 \qquad \text{e} \qquad \lim_{n\to+\infty} a_n = l_2$$

con $l_1 \neq l_2$. Dalla definizione di successione convergente si ha che

per ogni intorno $I(l_1, \varepsilon)$ esiste un indice $n_1(\varepsilon) \in I\!N$ tale che per ogni $n \geq n_1$ si ha che $a_n \in I(l_1, \varepsilon)$;

per ogni intorno $I(l_2, \varepsilon)$ esiste un indice $n_2(\varepsilon) \in I\!N$ tale che per ogni $n \geq n_2$ si ha che $a_n \in I(l_2, \varepsilon)$. Scegliamo ancora $\varepsilon = \frac{1}{3}|l_1 - l_2| > 0$ e sia $n_0 = \max(n_1, n_2)$, ove n_1 ed n_2 sono gli indici corrispondenti all'ε scelto, dati dalla definizione appena ricordata. Allora, $I(l_1, \varepsilon) \cap I(l_2, \varepsilon) = \emptyset$, mentre, per quanto appena detto, per ogni $n \geq n_0$, $a_n \in I(l_1, \varepsilon)$ ed $a_n \in I(l_2, \varepsilon)$ ovvero $a_n \in I(l_1, \varepsilon) \cap I(l_2, \varepsilon) = \emptyset$. Poiché ciò è assurdo, ne segue la tesi. $\square$

Teorema 1.2 *(Regolarità delle successioni monotone) Sia* $(a_n)_{n\in I\!N}$ *una successione monotona crescente (analog. decrescente) di numeri reali. Allora*

(i) se essa è limitata, converge al suo estremo superiore (inferiore)

(ii) se essa è non limitata, diverge a $+\infty$ $(-\infty)$.

Dim. Consideriamo il caso in cui la successione sia crescente; la dimostrazione procede in modo del tutto analogo, quando la successione è decrescente.

(i) Poichè $(a_n)_{n\in I\!N}$ è limitata, chiamiamo S il suo estremo superiore. Per definizione si ha che, per ogni $n \in I\!N$, $a_n \le S$ ed inoltre per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un elemento della successione, che indichiamo con $a_{n_0(\varepsilon)}$ tale che $a_{n_0} > S - \varepsilon$. Per la monotonia della successione si ha pure che, per ogni $n \ge n_0$, $a_n \ge a_{n_0}$, pertanto

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists\, n_0(\varepsilon) \in I\!N \;\; \text{t.c.} \;\; \forall n \ge n_0 \;\; \text{si ha } S - \varepsilon < a_{n_0} \le a_n \le S < S + \varepsilon$$

e quest'ultima è proprio la definizione di $a_n \to S$.

(ii) Poichè $(a_n)_{n\in I\!N}$ è non limitata, per definizione, si ha che per ogni $M > 0$ esiste un elemento della successione, che indichiamo con $a_{n_0(M)}$ tale che $a_{n_0} > M$. Per la monotonia della successione si ha pure che, per ogni $n \ge n_0$, $a_n \ge a_{n_0}$, pertanto

$$\forall M > 0 \;\; \exists\, n_0(M) \in I\!N \;\; \text{t.c.} \;\; \forall n \ge n_0 \;\; \text{si ha } M < a_{n_0} \le a_n$$

e quest'ultima è proprio la definizione di $a_n \to +\infty$. □

Teorema 1.3 *(Criterio di Cauchy per le successioni) Sia $(a_n)_{n\in I\!N}$ una successione di numeri reali. Allora le seguenti condizioni sono equivalenti:*

(i) $(a_n)_{n\in I\!N}$ *è convergente;*

(ii) $(a_n)_{n\in I\!N}$ *è di Cauchy.*

Dim. Assumiamo che valga (i). Dalla definizione di successione convergente si ha che

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists\, n_0(\varepsilon) \in I\!N \;\; \text{t.c.} \;\; \forall n \ge n_0 \;\; \text{si ha che } \; |a_n - l| < \varepsilon/2 \, .$$

Scegliamo quindi $\varepsilon > 0$ qualsiasi e siano $n, m \ge n_0$, ove n_0 è l'indice corrispondente all'ε scelto, dato dalla definizione appena ricordata. Utilizzando la disuguaglianza triangolare si ottiene

$$|a_n - a_m| \le |a_n - l| + |a_m - l| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Abbiamo così ottenuto che la successione considerata è di Cauchy.

Assumiamo ora che valga (ii), cioè

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists\, n_0(\varepsilon) \in I\!N \;\; \text{t.c.} \;\; \forall n, m \ge n_0 \;\; \text{si ha che } \; |a_n - a_m| < \varepsilon \, . \tag{1.2}$$

La dimostrazione procederà in 3 passi:

1. dimostriamo che ogni successione di Cauchy è limitata;
2. applichiamo il Teorema di Bolzano–Weierstrass;
3. dimostriamo che se una successione di Cauchy ammette una sottosuccessione convergente ad un limite l, allora tutta la successione converge ad l.

1. Fissiamo $\varepsilon = 1$ e sia n_0 l'indice corrispondente a tale ε dato dalla definizione di successione di Cauchy appena ricordata. Utilizzando la disuguaglianza triangolare si ottiene che, per ogni $n \ge n_0$,

$$|a_n| \le |a_n - a_{n_0}| + |a_{n_0}| < 1 + |a_{n_0}| =: M_1.$$

Siano poi

$$M_2 := \max_{n=1,\dots,n_0-1} |a_n|$$

ed $M = M_1 + M_2$. Allora, per ogni $n \in I\!N$, $|a_n| \leq M$, poiché o $|a_n| \leq M_2 \leq M$, se $n = 1, \ldots, n_0 - 1$, oppure $|a_n| \leq M_1 \leq M$, se $n \geq n_0$. Quindi la successione $(a_n)_{n\in I\!N}$ è limitata.

2. Il Teorema di Bolzano–Weierstrass, unitamente al punto 1, ci garantisce che esiste una sottosuccessione $(a_{n_k})_{k\in I\!N}$ di $(a_n)_{n\in I\!N}$ ed un numero reale l tale che $a_{n_k} \to l$, ovvero

$$\forall\varepsilon > 0 \;\; \exists\, k_0(\varepsilon) \in I\!N \;\; \text{t.c.} \;\; \forall k \geq k_0 \;\; \text{si ha che} \;\; |a_{n_k} - l| < \varepsilon \; . \tag{1.3}$$

3. Scegliamo ora $\varepsilon > 0$ qualsiasi e sia $\overline{n} = \max(n_0, n_{k_0})$, ove n_0 è l'indice corrispondente all'ε scelto dato dalla (1.2), mentre k_0 è l'indice corrispondente all'ε scelto dato dalla (1.3). Allora, utilizzando la disuguaglianza triangolare, si ottiene che, per ogni $n \geq \overline{n}$,

$$|a_n - l| \leq |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - l| < 2\varepsilon \; ,$$

avendo cura di scegliere anche $n_k \geq \overline{n}$. Abbiamo così ottenuto che la successione considerata è convergente e ciò conclude la dimostrazione. □

Teorema 1.4 *(Criterio di Cauchy per le serie) Sia $(a_n)_{n\in I\!N}$ una successione di numeri reali. Allora le seguenti condizioni sono equivalenti:*

(i) la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ è convergente;

(ii) la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ è di Cauchy.

Dim. Ricordiamo la definizione di serie di Cauchy:

$$\forall\varepsilon > 0 \;\; \exists\, n_0(\varepsilon) \in I\!N \;\; \text{t.c.} \;\; \forall n, m \geq n_0 \;\; \text{con} \;\; n > m \;\; \text{si ha} \;\; |\sum_{k=m+1}^{n} a_k| < \varepsilon \; .$$

Tenendo presente la definizione di somma parziale $s_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$, è possibile riscrivere in modo equivalente la condizione di Cauchy in termini di successione delle somme parziali, ottenendo

$$\forall\varepsilon > 0 \;\; \exists\, n_0(\varepsilon) \in I\!N \;\; \text{t.c.} \;\; \forall n, m \geq n_0 \;\; \text{con} \;\; n > m \;\; \text{si ha che} \;\; |s_n - s_m| < \varepsilon \; .$$

Pertanto, poiché una serie è convergente (rispettivamente di Cauchy) se e solo se la successione delle sue somme parziali è convergente (rispettivamente di Cauchy), il teorema è conseguenza immediata del teorema precedente. □

Teorema 1.5 *(Condizione necessaria per la convergenza delle serie) Sia $(a_n)_{n\in I\!N}$ una successione di numeri reali tale che $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ sia convergente. Allora $(a_n)_{n\in I\!N}$ è infinitesima.*

Dim. Dal teorema precedente si ha che se $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$, allora essa è necessariamente di Cauchy, cioè

$$\forall\varepsilon > 0 \;\; \exists\, n_0(\varepsilon) \in I\!N \;\; \text{t.c.} \;\; \forall n, m \geq n_0 \;\; \text{con} \;\; n > m \;\; \text{si ha} \;\; |\sum_{k=m+1}^{n} a_k| < \varepsilon \; .$$

In particolare, possiamo scegliere nella precedente definizione $n = m + 1$, ottenendo così

$$|a_{m+1}| = |\sum_{k=m+1}^{m+1} a_k| < \varepsilon \qquad \forall m \geq n_0$$

che è appunto la definizione di $a_n \to 0$, per $n \to +\infty$. Ciò conclude la dimostrazione. □

Teorema 1.6 *(Criterio della radice) Sia $(a_n)_{n\in I\!N}$ una successione di numeri reali non negativi. Supponiamo che esista il $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lambda$. Allora*
(i) se $\lambda < 1$, la serie converge;
(ii) se $\lambda > 1$, la serie diverge.

Nulla si può dire del carattere della serie nel caso in cui $\lambda = 1$, come mostrato dai due esempi

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \qquad \text{e} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Infatti, la prima serie risulta essere divergente, mentre la seconda è convergente. In entrambi i casi però

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1.$$

Dim. Supponiamo dapprima che $\lambda < +\infty$. Dalla definizione di successione convergente si ottiene che

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists\, n_0(\varepsilon) \in I\!N \;\; \text{t.c.} \;\; \forall n \geq n_0 \;\; \text{si ha che} \;\; |\sqrt[n]{a_n} - \lambda| < \varepsilon \; . \tag{1.4}$$

(i). Poiché $\lambda < 1$, è possibile scegliere $\varepsilon > 0$ sufficientemente piccolo, in modo tale che $\lambda + \varepsilon < 1$. Per semplicità di notazioni chiamamo $h_1 := \lambda + \varepsilon$. Sia ora $n \geq n_0$, ove n_0 è l'indice corrispondente all'ε scelto, dato dalla definizione (1.4). Da essa si ha subito che, per ogni $n \geq n_0$, $\sqrt[n]{a_n} < h_1$ e ciò può essere equivalentemente riscritto come $a_n < (h_1)^n$. In altre parole, il termine generale della nostra serie è definitivamente maggiorato dal termine generale della serie geometrica, di ragione $h_1 < 1$. Poiché in questo caso

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (h_1)^n < +\infty \; ,$$

dal criterio del confronto si ottiene che anche la serie proposta è convergente.

(ii). Poiché $\lambda > 1$, è possibile scegliere $\varepsilon > 0$ sufficientemente piccolo, in modo tale che $\lambda - \varepsilon > 1$. Per semplicità di notazioni chiamamo $h_2 := \lambda - \varepsilon$. Sia ora $n \geq n_0$, ove n_0 è l'indice corrispondente all'ε scelto, dato dalla definizione (1.4). Da essa si ha subito che, per ogni $n \geq n_0$, $\sqrt[n]{a_n} > h_2$ e ciò può essere equivalentemente riscritto come $a_n > (h_2)^n$. In altre parole, il termine generale della nostra serie è definitivamente minorato dal termine generale della serie geometrica, di ragione $h_2 > 1$. Poiché in questo caso

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (h_2)^n = +\infty$$

dal criterio del confronto si ottiene che anche la serie proposta è divergente.

Infine, se $\lambda = +\infty$, significa che

$$\forall M > 0 \;\; \exists\, n_0(M) \in I\!N \;\; \text{t.c.} \;\; \forall n \geq n_0 \;\; \text{si ha che} \;\; \sqrt[n]{a_n} > M \; .$$

Pertanto, scegliamo $M = 2$ e sia $n \geq n_0$, ove n_0 è l'indice corrispondente a tale M dato dalla definizione appena ricordata. Allora, $a_n > 2^n \to +\infty$, quindi la serie proposta diverge, poiché il termine generale non è infinitesimo, cioè non soddisfa la condizione necessaria per la convergenza. $\square$

Teorema 1.7 *(Teorema dell'assoluta convergenza) Sia $(a_n)_{n\in I\!N}$ una successione di numeri reali. Assumiamo che la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ sia convergente. Allora converge anche la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.*

Dim. Poiché la serie converge assolutamente, dal teorema 1.4 si ha che la serie dei moduli è di Cauchy, cioè

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists\, n_0(\varepsilon) \in I\!N \ \ \text{t.c.} \ \ \forall n, m \geq n_0 \ \ \text{con} \ \ n > m \ \ \text{si ha} \ \ \sum_{k=m+1}^{n} |a_k| < \varepsilon \ .$$

D'altra parte, dalla disuguaglianza triangolare iterata più volte, si ottiene

$$\left| \sum_{k=m+1}^{n} a_k \right| \leq \sum_{k=m+1}^{n} |a_k| < \varepsilon \ . \tag{1.5}$$

La (1.5) mostra che la serie proposta è di Cauchy, quindi, sempre per il teorema 1.4, essa converge. □

2. Limiti e continuità delle funzioni di una variabile.

Teorema 2.1 *(I^o Teorema di permanenza del segno) Sia I un intervallo di numeri reali, $x_0 \in I$ ed $f : I \to I\!R$ una funzione assegnata. Supponiamo che esista il $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$. Allora, se $l > 0$ (rispettivamente $l < 0$) esiste un intorno $B(x_0, \delta)$ di x_0 tale che per ogni $x \in \Big(B(x_0,\delta) \setminus \{x_0\}\Big) \cap I$ si ha che $f(x) > 0$, (rispettivamente $f(x) < 0$).*

Dim. Supponiamo dapprima che $l \in I\!R$ e consideriamo il caso $l > 0$. Poiché $f(x) \to l$, per $x \to x_0$, dalla definizione di limite si ha

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists\, \delta(\varepsilon) > 0 \ \ \text{t.c.} \ \ \forall x \in I \ \ \text{con} \ \ 0 < |x - x_0| < \delta \ \ \text{si ha che} \ \ |f(x) - l| < \varepsilon \ .$$

Scegliamo $\varepsilon = l/2 > 0$ e sia δ il corrispondente numero reale dato dalla definizione precedente, in modo tale che per ogni $x \in I$ con $0 < |x - x_0| < \delta$ si abbia $|f(x) - l| < l/2$. Osservando che l'ultima disuguaglianza può essere riscritta nella forma

$$0 < l/2 = l - l/2 < f(x) < l + l/2$$

e che l'insieme dei punti $x \in I$ tali che $0 < |x - x_0| < \delta$ non è altro che $\Big(B(x_0,\delta) \setminus \{x_0\}\Big) \cap I$, la tesi è dimostrata.

Il caso $l \in I\!R$ con $l < 0$ si fa in modo del tutto analogo, scegliendo $\varepsilon = -l/2 > 0$. Infine, se $l = +\infty$ oppure $l = -\infty$ la tesi segue immediatamente dalla definizione. □

Teorema 2.2 *(II^o Teorema di permanenza del segno) Sia I un intervallo di numeri reali, $x_0 \in I$ ed $f : I \to I\!R$ una funzione assegnata. Supponiamo che esista un intorno $B(x_0, \delta)$ di x_0 tale che per ogni $x \in \Big(B(x_0,\delta) \setminus \{x_0\}\Big) \cap I$ si abbia $f(x) \geq 0$, (rispettivamente $f(x) \leq 0$) e che esista il $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$. Allora $l \geq 0$ (rispettivamente $l \leq 0$).*

Dim. Consideriamo dapprima il caso in cui f sia non negativa. Supponiamo per assurdo che l sia strettamente negativo, allora per il teorema 2.1 si avrebbe che in un opportuno intorno di x_0 (salvo al più nel punto x_0 stesso) la funzione f dovrebbe essere strettamente negativa, contraddicendo l'ipotesi. Il caso f non positiva si fa in modo del tutto analogo. Il teorema è così dimostrato. □

Teorema 2.3 *(Teorema ponte) Sia I un intervallo di numeri reali, $x_0 \in I$ ed $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione assegnata. Allora le seguenti condizioni sono equivalenti:*
(i) $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$;
(ii) per ogni successione $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ contenuta in I tale che $x_n \neq x_0$ per tutti gli indici e $x_n \to x_0$ per $n \to +\infty$, si ha $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = l$.

Dim. Supponiamo dapprima il caso $l \in \mathbb{R}$. Assumiamo che valga (i). Ciò significa che

$$\forall\varepsilon > 0 \ \ \exists\, \delta(\varepsilon) > 0 \ \text{ t.c. } \ \forall x \in I \ \text{ con } \ 0 < |x - x_0| < \delta \ \text{ si ha } \ |f(x) - l| < \varepsilon \ . \tag{2.1}$$

Sia ora $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una arbitraria successione contenuta in I, mai coincidente con x_0 e convergente ad x_0, ovvero tale da soddisfare la seguente condizione:

$$\forall\delta > 0 \ \ \exists\, n_0(\delta) \in \mathbb{N} \ \text{ t.c. } \ \forall n \geq n_0 \ \ 0 < |x_n - x_0| < \delta \ . \tag{2.2}$$

Scegliamo quindi $\varepsilon > 0$ qualsiasi e prendiamo il δ corrispondente dato dalla (2.1). A partire da tale δ, dalla (2.2) si trova un indice n_0 tale che, per ogni $n \geq n_0$, $0 < |x_n - x_0| < \delta$. Utilizzando nuovamente la (2.1) con $x = x_n$, si ottiene che $|f(x_n) - l| < \varepsilon$, cioè la (ii).

Assumiamo ora che valga la (ii) e procediamo per assurdo. Supponiamo cioè che

$$\exists\, \varepsilon > 0 \ \text{ tale che } \ \forall\delta > 0 \ \ \exists\, x \in I, \ \text{ con } \ 0 < |x - x_0| < \delta \ \text{ ma } \ |f(x) - l| \geq \varepsilon. \tag{2.3}$$

Fissiamo un ε siffatto e poniamo, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\delta_n = 1/n$. Sia x_n il corrispondente punto di $I \setminus \{x_0\}$ dato dalla (2.3). Poiché $0 < |x_n - x_0| < 1/n$, si ha che $x_n \to x_0$, per $n \to +\infty$, ma d'altra parte, poiché $|f(x_n) - l| \geq \varepsilon$, $f(x_n) \not\to l$, contraddicendo la (ii).

I casi $l = +\infty$ oppure $l = -\infty$ si fanno in modo del tutto adalogo, sostituendo la definizione di funzione divergente a quella di funzione convergente richiamata nella (2.1). Il teorema è così dimostrato. $\square$

3. <u>Calcolo differenziale per funzioni di una variabile.</u>

Teorema 3.1 *(Derivabilità implica continuità) Sia I un intervallo reale e sia $f : I \to \mathbb{R}$ una assegnata funzione. Sia $x_0 \in I$ e assumiamo che f sia derivabile in x_0, allora f è continua in x_0.*

Dim. Assumiamo dapprima che x_0 sia un punto interno ad I. Poiché f è derivabile in x_0, si ha che esiste finito il limite del rapporto incrementale, ovvero

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0) \in \mathbb{R}.$$

La precedente uguaglianza si può riscrivere anche nella forma

$$f(x_0 + h) - f(x_0) - f'(x_0)h = o(h) \qquad \Longleftrightarrow \qquad f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + o(h)$$

per $h \to 0$. Prendendo il limite per $h \to 0$ di entrambi i membri dell'ultima relazione, si ottiene

$$\lim_{h\to 0} f(x_0 + h) = f(x_0)$$

che è appunto la definizione di continuità in x_0.

Se x_0 è invece l'estremo destro (risp. sinistro) dell'intervallo I, la dimostrazione procede in modo analogo, solo tenendo presente che h deve essere negativo (risp. positivo) e tendere a 0^- (risp. 0^+). $\square$

Teorema 3.2 *(I^0 Teorema della derivata nulla) Sia I un intervallo reale ed $f : I \to I\!R$ una funzione assegnata. Assumiamo che f sia derivabile e costante in I. Allora $f'(x) \equiv 0$ in I.*

Dim. Sia $x \in I$. Assumiamo dapprima che x sia un punto interno all'intervallo. Poiché f è derivabile in x si ha che

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x) \in I\!R.$$

D'altra parte, poiché f è costante in I, per ogni h sufficientemente piccolo in modo tale $x+h \in I$, si ha che $f(x+h)-f(x) = 0$ e quindi

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0.$$

Se x è invece l'estremo destro (risp. sinistro) dell'intervallo I, la dimostrazione procede in modo analogo, solo tenendo presente che h deve essere negativo (risp. positivo) e tendere a 0^- (risp. 0^+). □

Teorema 3.3 *(Teorema di Fermat) Sia I un intervallo reale ed $f : I \to I\!R$ una funzione assegnata. Assumiamo che f sia derivabile in x_0, punto interno all'intervallo I, e che x_0 sia un estremante locale. Allora $f'(x_0) = 0$.*

Dim. Supponiamo, per esempio, che x_0 sia punto di massimo (in modo del tutto analogo si ragiona nel caso in cui x_0 sia punto di minimo). Allora, per h sufficientemente piccolo, si ha $f(x_0+h) \le f(x_0)$. Pertanto

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \le 0 \qquad \text{se} \qquad h > 0$$
$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \ge 0 \qquad \text{se} \qquad h < 0\ .$$

D'altra parte, dal II^0 Teorema di permanenza del segno e poiché per ipotesi f è derivabile in x_0 si ha che

$$0 \le \lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \le 0$$

da cui segue $f'(x_0) = 0$. Ciò conclude la dimostrazione. □

Teorema 3.4 *(Teorema di Rolle) Sia $f : [a,b] \to I\!R$ una funzione assegnata. Assumiamo che f sia continua in $[a,b]$, derivabile in (a,b) ed $f(a) = f(b)$. Allora esiste un punto $c \in (a,b)$ tale che $f'(c) = 0$.*

Dim. Poiché f è continua nell'intervallo chiuso e limitato $[a,b]$, dal Teorema di Weierstrass devono esistere due punti c_1 e c_2 appartenenti ad $[a,b]$ rispettivamente di minimo e di massimo per f in $[a,b]$. Se entrambi questi punti sono estremi dell'intervallo, cioè $c_1 = a$ e $c_2 = b$ (o viceversa), poiché $f(a) = f(b)$, necessariamente la funzione risulterà costante in $[a,b]$ ed essendo derivabile nell'intervallo aperto, avrà derivata costantemente nulla in tutti i punti di (a,b), quindi basta scegliere come c un qualunque punto interno all'intervallo e si avrà la tesi.

Se invece almeno uno dei due punti, per esempio c_1, appartiene all'interno di (a,b) allora, poiché f è per ipotesi derivabile in c_1 ed esso è punto di minimo, per un noto teorema si ha che $f'(c_1) = 0$; quindi la tesi sarà soddisfatta scegliendo $c = c_1$. □

Teorema 3.5 *(Teorema di Cauchy) Siano $f, g : [a,b] \to I\!R$ due funzioni assegnate. Assumiamo che f e g siano continue in $[a,b]$ e derivabili in (a,b). Allora esiste un punto $c \in (a,b)$ tale che*

$$[f(b)-f(a)]g'(c) = [g(b)-g(a)]f'(c).$$

Dim. Consideriamo la funzione

$$\Phi(x) = [f(b) - f(a)]g(x) - [g(b) - g(a)]f(x).$$

Essa risulta continua in $[a, b]$ e derivabile in (a, b), poiché combinazione lineare di funzioni con le medesime proprietà; inoltre un semplice calcolo mostra che $\Phi(a) = \Phi(b)$. Applicando il Teorema di Rolle alla funzione Φ si ottiene che esiste un punto $c \in (a, b)$ tale che $\Phi'(c) = 0$ e poiché

$$\Phi'(x) = [f(b) - f(a)]g'(x) - [g(b) - g(a)]f'(x)$$

ne segue che $\Phi'(c) = [f(b) - f(a)]g'(c) - [g(b) - g(a)]f'(c) = 0$, ovvero la tesi. □

Teorema 3.6 *(Teorema di Lagrange) Sia $f : [a, b] \to I\!\!R$ una funzione assegnata. Assumiamo che f sia continua in $[a, b]$ e derivabile in (a, b). Allora esiste un punto $c \in (a, b)$ tale che*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

Dim. Consideriamo la funzione $g : [a, b] \to I\!\!R$ definita da $g(x) = x$. Allora la coppia di funzioni f (assegnata nell'enunciato del teorema) e g (definita ora) soddisfano le ipotesi del Teorema di Cauchy, pertanto esiste un punto $c \in (a, b)$ tale che

$$[f(b) - f(a)]g'(c) = [g(b) - g(a)]f'(c) \qquad \Longleftrightarrow \qquad f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$$

essendo $g(b) = b$, $g(a) = a$ e $g'(x) \equiv 1$. La tesi segue, pertanto, dall'ultima relazione, dividendo ambo i membri per $(b - a)$. □

Teorema 3.7 *(II^0 Teorema della derivata nulla) Sia I un intervallo reale ed $f : I \to I\!\!R$ una funzione assegnata. Assumiamo che f sia derivabile in I e che $f'(x) \equiv 0$ in I. Allora f è costante in I.*

Dim. Siano x_1 e x_2 due punti qualsiasi appartenenti ad I e supponiamo che sia $x_1 < x_2$. Consideriamo l'intervallo $[x_1, x_2]$, in cui f risulta continua e derivabile, per ipotesi. Applicando il Teorema di Lagrange si ottiene che esiste un punto $c \in (x_1, x_2)$ tale che

$$f(x_1) - f(x_2) = (x_1 - x_2)f'(c).$$

Poiché per ipotesi $f'(x) \equiv 0$ in I, in particolare si avrà $f'(c) = 0$ e quindi $f(x_1) = f(x_2)$, cioè f assume il medesimo valore in x_1 ed x_2. Per l'arbitrarietà dei punti x_1 ed x_2 in I, segue la tesi. □

Teorema 3.8 *(Teorema di De L'Hospital, caso $(\frac{0}{0})$) Sia I un intervallo reale ed $x_0 \in I$. Siano f, $g : I \to I\!\!R$ due funzioni continue e derivabili in I tali che*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0 = \lim_{x \to x_0} g(x) \ . \tag{3.1}$$

Assumiamo inoltre che g e g' siano sempre diverse da zero in un intorno di x_0, tranne al più nel punto x_0 stesso. Allora, se esiste il $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (finito o infinito) si ha

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Dim. Poichè f e g sono continue e vale la (3.1), ne segue che $f(x_0) = g(x_0) = 0$. Supponiamo inoltre che $x > x_0$, in modo analogo si procederà nel caso $x < x_0$ (se x_0 fosse un estremo di I, si prende in considerazione opportunamente solo uno dei due casi). Poichè f e g sono, per ipotesi, continue e derivabili nell'intervallo $[x_0, x]$, applicando il Teorema di Cauchy si ottiene

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

ove c è un punto opportuno dell'intervallo (x_0, x). Osservando che, quando $x \to x_0$ anche $c \to x_0$, possiamo passare al limite nella precedente uguaglianza, ottenendo

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{c \to x_0} \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Poichè il secondo limite nella precedente uguaglianza esiste per ipotesi, il teorema è dimostrato. □

4. Teoria dell'integrazione.

Teorema 4.1 *(Caratterizzazione delle primitive) Sia I un intervallo reale ed $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione assegnata. Allora*

(i) se $F : I \to \mathbb{R}$ è una primitiva di f, anche la funzione $F + c$ è una primitiva di f, qualunque sia la costante $c \in \mathbb{R}$;

(ii) se F, $G : I \to \mathbb{R}$ sono due primitive di f, esiste una costante $c \in \mathbb{R}$ tale che $G = F + c$.

Dim.

(i). Dalla linearità della derivata e dal Teorema della derivata nulla, segue subito che

$$(F + c)'(x) = F'(x) = f(x) \qquad \forall x \in I$$

qualunque sia la costante $c \in \mathbb{R}$, e ciò conclude la prima parte della dimostrazione.

(ii). Poichè F e G sono entrambe primitive della stessa funzione f, si ha che, per ogni $x \in I$,

$$F'(x) = G'(x) = f(x) \qquad \Longrightarrow \qquad G'(x) - F'(x) = 0.$$

Utilizzando ancora la linearità della derivata si ottiene che la funzione $H = G - F$ ha la derivata identicamente nulla nell'intervallo I, pertanto dal II^0 Teorema della derivata nulla segue che H è costante in I, cioè esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che, per ogni $x \in I$,

$$G(x) - F(x) = H(x) = c \qquad \Longleftrightarrow \qquad G(x) = F(x) + c.$$

Ciò conclude la dimostrazione del teorema. □

Teorema 4.2 *(I^0 Teorema della media) Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione integrabile secondo Riemann. Allora*

$$m(b - a) \leq \int_a^b f(x)\, dx \leq M(b - a)$$

ove $m \leq f(x) \leq M$ per ogni $x \in [a, b]$.

Dim. Poiché $m \leq f(x) \leq M$ per ogni $x \in [a,b]$, dalla proprietà di monotonia dell'integrale si ha

$$\int_a^b m\ dx \leq \int_a^b f(x)\ dx \leq \int_a^b M\ dx$$

da cui la tesi. □

Teorema 4.3 *(II^0 Teorema della media) Sia $f : [a,b] \to I\!R$ una funzione continua. Allora esiste un punto $x_0 \in (a,b)$ tale che*

$$\int_a^b f(x)\ dx = f(x_0)(b-a).$$

Dim. Poiché f è continua in $[a,b]$ che è chiuso e limitato, dal teorema di Weierstrass si ha che esistono $m, M \in I\!R$ ed $x_m, x_M \in [a,b]$ tali che $f(x_m) = m \leq f(x) \leq M = f(x_M)$ per ogni $x \in [a,b]$. Dal teorema 4.2 si ottiene

$$m \leq \frac{1}{(b-a)} \int_a^b f(x)\ dx \leq M\ ,$$

cioè il valore medio di f, assegnato dall'espressione $\frac{1}{(b-a)} \int_a^b f(x)\ dx$, risulta essere un numero compreso tra $f(x_m)$ ed $f(x_M)$. Quindi, per il teorema dei valori intermedi, si ha che esiste un punto x_0 in cui tale valor medio viene assunto, cioè

$$f(x_0) = \frac{1}{(b-a)} \int_a^b f(x)\ dx\ .$$

Ciò conclude la dimostrazione. □

Teorema 4.4 *(Teorema di Torricelli) Sia I un intervallo reale ed $f : I \to I\!R$ una funzione continua. Sia $F : I \to I\!R$ la funzione integrale definita da*

$$F(x) = \int_\alpha^x f(t)\ dt,$$

ove α è un qualunque punto in I.

Allora F è derivabile in I ed $F'(x) = f(x)$, per ogni $x \in I$, ovvero F è una primitiva di f.

Dim. Sia x un arbitrario punto dell'intervallo I. Vogliamo provare che F è derivabile in x e che la sua derivata coincide con la funzione f calcolata nel punto x. A tale scopo, cominciamo a scrivere il rapporto incrementale della funzione F:

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{\int_\alpha^{x+h} f(t)\ dt - \int_\alpha^x f(t)\ dt}{h} = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)\ dt \tag{4.1}$$

ove, nell'ultimo passaggio, abbiamo usato la proprietà di additività dell'integrale rispetto all'intervallo di integrazione. Inoltre, dal Teorema della media segue che

$$\frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)\ dt = f(\xi) \tag{4.2}$$

ove ξ è un opportuno punto appartenente all'intervallo $(x, x+h)$, se $h > 0$, oppure all'intervallo $(x+h, x)$, se $h < 0$. In ogni caso, quando $h \to 0$, $\xi \to x$. Passando, quindi, al limite per $h \to 0$ nella (4.1), tenendo presente la (4.2) e ricordando che f è una funzione continua, si ottiene

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)\ dt = \lim_{\xi \to x} f(\xi) = f(x).$$

Ciò dimostra che F è derivabile in x e che $F'(x) = f(x)$. Dall'arbitrarietà di $x \in I$ si ha la tesi. □

Teorema 4.5 *(Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale) Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Sia $G : [a, b] \to \mathbb{R}$ una qualunque primitiva di f. Allora*

$$\int_a^b f(t)\ dt = G(b) - G(a).$$

Dim. Dal Teorema di Torricelli, prendendo $\alpha = a$, si ha che la funzione

$$F(x) = \int_a^x f(t)\ dt$$

è una primitiva di f, pertanto dal Teorema di caratterizzazione delle primitive segue che $G(x) = F(x) + c$ per un'opportuna costante c, ovvero

$$G(x) = \int_a^x f(t)\ dt + c. \tag{4.3}$$

Da una ben nota proprietà dell'integrale, si ottiene che $G(a) = F(a) + c = c$ e quindi, dalla (4.3),

$$G(b) = \int_a^b f(t)\ dt + c = \int_a^b f(t)\ dt + G(a)$$

da cui segue la tesi. □

5. Calcolo differenziale in $\mathbb{R}^N$.

Teorema 5.1 *(Proprietà delle funzioni differenziabili) Sia $A \subseteq \mathbb{R}^N$ un insieme aperto ed $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione assegnata. Sia $P_0 = (x_1^0, \dots, x_N^0) \in A$. Assumiamo che f sia differenziabile in P_0. Allora*

(i) f è continua in P_0;

(ii) f ammette tutte le derivate direzionali in P_0;

(iii) vale la seguente formula

$$\frac{\partial f}{\partial v}(P_0) = \nabla f(P_0) \cdot v = \sum_{i=1}^N \frac{\partial f}{\partial x_i}(P_0) v_i$$

per ogni versore $v = (v_1, \dots, v_N) \in \mathbb{R}^N$.

Dim.

(i) Dalla definizione di differenziabilità segue che, per $H \in \mathbb{R}^N$ sufficientemente piccolo in modo tale che $P_0 + H \in A$,

$$f(P_0 + H) = f(P_0) + \nabla f(P_0) \cdot H + o(\|H\|). \tag{5.1}$$

Passando al limite per $\|H\| \to 0$ in entrambi i membri della precedente uguaglianza, si ottiene

$$\lim_{\|H\|\to 0} f(P_0+H) = \lim_{\|H\|\to 0} [f(P_0)+\nabla f(P_0)\cdot H+o(\|H\|)] = f(P_0)+\lim_{\|H\|\to 0}[\nabla f(P_0)\cdot H+o(\|H\|)] = f(P_0)$$

ove si è tenuto conto che

$$\lim_{\|H\|\to 0} \nabla f(P_0) \cdot H = 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{\|H\|\to 0} o(\|H\|) = 0.$$

Ciò dimostra che f è continua in P_0.

(ii) + (iii) Sia $v \in I\!R^N$ un qualunque versore e scegliamo $H = tv$ nella (5.1), con t sufficientemente piccolo in modo tale che $P_0 + tv \in A$. Allora

$$\frac{f(P_0 + tv) - f(P_0)}{t} = \frac{\nabla f(P_0) \cdot tv + o(t)}{t}.$$

Passando al limite per $t \to 0$ in entrambi i membri della precedente uguaglianza, si ottiene

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial v}(P_0) &= \lim_{t \to 0} \frac{f(P_0 + tv) - f(P_0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{\nabla f(P_0) \cdot tv + o(t)}{t} \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{t \nabla f(P_0) \cdot v}{t} + \lim_{t \to 0} \frac{o(t)}{t} = \nabla f(P_0) \cdot v\end{aligned}$$

che conclude la dimostrazione del teorema. □