FUNZIONI DI 1 VARIABILE

Limiti di funzioni

- Calcolare i seguenti limiti:

$$
\begin{aligned}
&1) \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{x-\sin x}{\sqrt{x^2+1}-1}\\
&2) \quad \lim_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{\sqrt{x^2+1}-1}\\
&3) \quad \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}\\
&4) \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2}}{e^x}\\
&5) \quad \lim_{x\to 0} \frac{\arctan^2 x-\sin^2 x}{\arcsin^4 x}\\
&6) \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x\cos x-\frac{x^2}{3}\log(1+x)}{x^4}\\
&7) \quad \lim_{x\to 0} \frac{e^{-x}-\log(1+x)-(x-1)^2}{x^3}\ .
\end{aligned}
$$

- Determinare il campo di esistenza delle seguenti funzioni

$$
\begin{aligned}
&1) \quad f(x)=\arccos(x^2+3)\\
&2) \quad f(x)=\arccos\left(\frac{1}{|\log(x-6)|}-\frac{1}{6}\right)\\
&3) \quad f(x)=\sqrt{\arccos[\log_2(\sin e^x)]-\frac{2\pi}{3}}\ .
\end{aligned}
$$

• Studiare le seguenti funzioni e tracciarne un grafico qualitativo:

$$1)\quad f(x)=\begin{cases}\sqrt{9-x^2} & \text{se } |x|\le 3\\[2ex] \frac{9}{x}-x & \text{se } |x|>3\end{cases}$$

$$2)\quad f(x)=\log(3-|2x+1|) \qquad \text{(no derivata seconda)}$$

$$3)\quad f(x)=\sqrt[3]{x^2(x-1)}$$

$$4)\quad f(x)=\frac{\log x}{x}-x$$

$$5)\quad f(x)=\begin{cases}x\log x-\frac{1}{x} & \text{se } x>0\\[2ex] |\mathrm{e}^x-\frac{1}{\mathrm{e}^2}| & \text{se } x\le 0\end{cases}$$

$$6)\quad f(x)=\sqrt{|x-2|-2}$$

$$7)\quad f(x)=\begin{cases}\arctan\left[\frac{\cos x}{\sqrt{3}}\right] & \text{se } -\pi\le x\le\pi\\[2ex] \frac{5}{6}\pi-\sqrt{x^2} & \text{se } |x|>\pi\end{cases}$$

$$8)\quad f(x)=\mathrm{e}^{-2/x}[|x|+|x-1|]$$

$$9)\quad f(x)=\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}-4$$

$$10)\quad f(x)=\log(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x})\ .$$

• Stabilire per quali valori di $\alpha\in I\!R$ la seguente funzione è continua in $I\!R$:

$$f(x)=\begin{cases}-(\mathrm{e}^4+1)x+\frac{1}{2}\mathrm{e}^4 & \text{se } x\le 1/2,\\[2ex] (\alpha x^2+x)\mathrm{e}^{2/x}-x & \text{se } x>1/2.\end{cases}$$

• Stabilire se la seguente funzione è continua e derivabile in $I\!R$:

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{2}x-\log(1+2x^2) & \text{se } x\ge 0,\\[2ex] -\frac{\pi}{2}-\arctan\frac{1}{\sqrt{2}x} & \text{se } x<0.\end{cases}$$

• Stabilire per quali valori di $\alpha,\ \beta\in I\!R$ la seguente funzione è continua e derivabile in $(1,+\infty)$:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{\mathrm{e}^{(x-2)^2}-1}{x\sin^2(x^2-4)} & \text{se } 1<x<2,\\[2ex] 2\alpha x+\beta & \text{se } 2\le x\le 3,\\[2ex] (x-3)\log(x-3) & \text{se } x>3.\end{cases}$$

• Stabilire l'ordine di infinitesimo rispetto ad x, per $x\to 0^+$, delle seguenti funzioni:

$$1)\quad f(x)=\frac{\tan^3 x+\sin^3 x}{\arcsin^2 x}$$

$$2)\quad \log[1+2x^2\arctan(5x^2)]-10\mathrm{e}^{x^4}+10$$

$$3)\quad f(x)=\frac{(\mathrm{e}^{x^2}-1)x-x^3}{x(\sqrt{x}-\sin\sqrt{x})}\ .$$

- Stabilire l'ordine di infinito rispetto ad $1/x$, per $x \to 0^+$, della seguente funzione:

$$f(x) = \frac{\pi - 2\arctan\frac{1}{x^3}}{x^4} \ .$$

- Scrivere lo sviluppo di Taylor al secondo ordine con centro in $x = 2$ della funzione

$$f(x) = 1 + 2x + 5x^2 \ .$$

- Calcolare

$$\arcsin\left[\sin\left(\frac{27}{5}\pi\right)\right] \ .$$