ELEMENTI DI TOPOLOGIA

1. <u>La distanza. Esempi.</u>

Definizione 1.1. Sia X un sottoinsieme non vuoto di $I\!R^N$ $(N \geq 1)$ e sia $d : X \times X \to [0, +\infty)$ una funzione soddisfacente le seguenti proprietà:

i) $\forall x, y \in X,\ d(x,y) = 0$ se e solo se $x = y$ (annullamento);
ii) $\forall x, y \in X,\ d(x,y) = d(y,x)$ (simmetria);
iii) $\forall x, y, z \in X,\ d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ (disuguaglianza triangolare).

La funzione d è detta *metrica* (o *distanza*) in X.

ESEMPIO 1.2.

1) L'insieme dei numeri reali $I\!R$ usualmente è dotato della *metrica euclidea* o *pitagorica* assegnata da

$$d(x,y) = |x - y|.$$

2) Lo spazio $I\!R^N$ è usualmente dotato della *metrica euclidea* definita da

$$d(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} |x_i - y_i|^2} \qquad \forall x, y \in I\!R^N \ .$$

3) Sullo spazio $I\!R^N$ $(N > 1)$, oltre alla metrica euclidea introdotta precedentemente, possiamo definire anche le metriche

$$d_1(x,y) = \sum_{i=1}^{N} |x_i - y_i| \qquad \text{oppure} \qquad d_2(x,y) = \max_{i=1,\ldots,N} \{|x_i - y_i|\}.$$

Osservazione 1.3. Immediata conseguenza della simmetria e della proprietà triangolare è la seguente disuguaglianza:

$$|d(x,y) - d(x,z)| \leq d(y,z) \qquad \forall x, y, z \in X.$$

(Provarla per esercizio)

Non è difficile dimostrare la seguente disuguaglianza:

$$|x_k| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{N} x_i^2} \leq \sum_{i=1}^{N} |x_i| \qquad \forall k = 1, \ldots, N. \tag{1.1}$$

2. Insiemi aperti e insiemi chiusi.

D'ora in avanti, se non sarà diversamente specificato, cosidereremo sempre che X sia l'insieme $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 1)$ e d la corrispondente distanza euclidea.

Definizione 2.1. Dati $x_0 \in X$ e $r > 0$, chiamiamo *intorno sferico* (oppure *palla* o semplicemente *intorno*) di centro x_0 e raggio r l'insieme

$$B(x_0, r) = \{x \in X : d(x_0, x) < r\}$$

che può essere indicato anche con la notazione $I(x_0, r)$. Qualora sia chiaro dal contesto chi siano r ed x_0, si utilizzano anche le notazioni $I(x_0)$ oppure I.

ESEMPIO 2.2.

1) In $\mathbb{R}$ gli intorni sferici di un punto x_0 e raggio r non sono altro che gli intervalli $(x_0 - r, x_0 + r)$, estremi esclusi.

2) In $\mathbb{R}^2$ gli intorni sferici di un punto x_0 e raggio r non sono altro che i cerchi centrati in x_0 e di raggio r, privi della circonferenza.

3) In $\mathbb{R}^2$ dotato della metrica d_1 dell'esempio 1.2, gli intorni sferici di un punto x_0 e raggio r non sono altro che dei rombi centrati in x_0 con le diagonali parallele agli assi e di semilunghezza r, privi del contorno.

4) In $\mathbb{R}^2$ dotato della metrica d_2 dell'esempio 1.2, gli intorni sferici di un punto x_0 e raggio r non sono altro che dei quadrati centrati in x_0 con i lati paralleli agli assi e di semilunghezza r, privi del contorno.

5) In $\mathbb{R}^3$ dotato della metrica euclidea, gli intorni sferici di un punto x_0 e raggio r non sono altro che le sfere di centro x_0 e raggio r, prive della superficie sferica.

Dato un insieme $E \subseteq X$ non vuoto, indicheremo con E^c il complementare di E rispetto ad X, cioè l'insieme

$$E^c = X \setminus E = \{x \in X : x \notin E\}.$$

Valgono le seguenti relazioni

$$(E_1 \cup E_2)^c = E_1^c \cap E_2^c \qquad (E_1 \cap E_2)^c = E_1^c \cup E_2^c.$$

(Provarle per esercizio)

Definizione 2.3. Un punto $x_0 \in X$ si dice *interno* ad E se esiste un intorno $B(x_0, r)$ interamente contenuto in E. Si dice *esterno* ad E se è interno al suo complementare E^c e si dice *di frontiera* se non è nè interno nè esterno ad E.

Osservazione 2.4. Osserviamo che se x_0 è interno ad E allora esso appartiene ad E, mentre se è esterno ad E allora esso appartiene a E^c. Se invece x_0 è un punto di frontiera per E, allora esso può appartenere o meno all'insieme E, ma in ogni caso qualunque suo intorno contiene sia punti di E che punti del complementare E^c.

L'insieme dei punti interni di E si indica con $\overset{\circ}{E}$ e quello dei suoi punti di frontiera con ∂E. Ovviamente $\partial E = \partial E^c$.

Definizione 2.5. Un punto $x_0 \in X$ si dice di *accumuluzione* per E se in ogni suo intorno esiste un punto $x \in E$ diverso da x_0.

Un punto di accumulazione per E può appartenere o meno ad E. I punti di E che non sono di accumulazione si chiamano punti *isolati.* I punti di frontiera di E che non appartengono ad E sono necessariamente dei punti di accumulazione per E.

Tutti i punti interni di E sono punti di accumulazione per E; se invece $x_0 \in E$, ma non è di accumulazione, allora esso deve essere necessariamente un punto di frontiera isolato.

L'insieme dei punti di accumulazione di E si chiama *derivato* di E e si indica con E'.

Definizione 2.6. Un insieme $E \subseteq X$ si dice *aperto* se ogni suo punto è punto interno, si dice *chiuso* se il suo complementare è aperto. Infine si chiama *chiusura* di E l'insieme $\overline{E} = E \cup \partial E = E \cup E'$.

Teorema 2.7. *Ogni intorno sferico è un insieme aperto.*

* * *

Dim. Sia $B(x_0, r)$ un intorno sferico in X e sia $x \in B(x_0, r)$. Definiamo $\rho = [r - d(x_0, x)]/2 > 0$ e dimostriamo che $B(x, \rho) \subseteq B(x_0, r)$. Sia $y \in B(x, \rho)$, dalla disuguaglianza triangolare, si ottiene

$$\begin{aligned} d(x_0, y) &\leq d(x_0, x) + d(x, y) < d(x_0, x) + \rho \\ &= r/2 + d(x_0, x)/2 < r/2 + r/2 = r. \end{aligned}$$

Quindi, $y \in B(x_0, r)$; per l'arbitrarietà della scelta di y in $B(x, \rho)$ si ha la tesi. $\square$

* * *

L' insieme totale $I\!R^N$ $(N \geq 1)$ e l'insieme vuoto sono annoverati contemporaneamente sia tra gli insiemi aperti che tra gli insiemi chiusi. Ci sono, invece, insiemi che non sono nè aperti nè chiusi (per esempio gli intervalli di $I\!R$ che contengono solo uno dei due estremi).

Osservazione 2.8. Non è difficile dimostrare che E è aperto se e solo se il suo complementare è chiuso; E è chiuso se e solo se contiene il suo derivato; E è chiuso se e solo se $\partial E \subseteq E$; E è chiuso se e solo se coincide con la sua chiusura; la frontiera ∂E di un insieme E è sempre un insieme chiuso.

ESERCIZI.

Determinare in ciascun caso gli insiemi E', $\overset{\circ}{E}$, ∂E, $\overline{E}$ e l'insieme dei punti isolati. Stabilire poi se E è aperto, chiuso, nè aperto nè chiuso.

1) Sia $X = I\!R$ dotato della metrica euclidea:

$$E = (-1,1) \qquad E = [-1,1] \qquad E = [0,1)$$
$$E = [-1,1] \cup \{2\} \qquad E = \Big([-1,1] \setminus \{0\}\Big) \cup \{2\}$$
$$E = \Big((-1,1) \setminus \{0\}\Big) \cup \{2\} \qquad E = (-1,1) \setminus \{0\}$$
$$E = [-1,1) \setminus \mathbf{Q} \qquad E = \{1,2,3,\ldots\}$$

ove $\mathbf{Q}$ è l'insieme dei numeri razionali.

2) Sia $X = I\!R^2$ dotato della metrica euclidea.

$$E = \{x^2+y^2 = 1\} \qquad E = \{x^2+y^2=1\} \cup \{(0,0)\} \qquad E = \{x^2+y^2 < 1\} \setminus \{(0,0)\}.$$

3) Sia $X = (-1,1)$ dotato della metrica euclidea.

$$E = [0,1) \qquad E = [0,1) \setminus \{1/2\}$$
$$E = (0,1) \qquad E = (0,1) \setminus \{1/2\}$$
$$E = \{0\} \cup \{1/n \ : \ n > 1\} \qquad E = \{1/n \ : \ n > 1\}.$$

Teorema 2.9. *Sia $\mathcal{A}$ una famiglia qualsiasi di sottoinsiemi aperti di X. Allora è aperto anche l'insieme $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$. Dato $n \in I\!N$, sia $\{A_1, \ldots, A_n\}$ una collezione finita di sottoinsiemi aperti di X. Allora è aperto anche l'insieme $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$.*

* * *

Dim. Sia $E = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$ e $x \in E$; dimostriamo che x è punto interno ad E, cioè che esiste $r > 0$ tale che $B(x,r) \subset E$. Poichè $x \in \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$, esso appartiene ad almeno un insieme della famiglia $\mathcal{A}$, che denotiamo con $\widetilde{A}$. Poichè $\widetilde{A}$ è aperto, esiste $r > 0$ tale che $B(x,r) \subset \widetilde{A} \subset E$. Da qui la tesi.

Sia ora $E = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$ e sia $x \in E$; dimostriamo che x è punto interno ad E. Poichè $x \in \bigcap_{i=1}^{n} A_i$, allora $x \in A_i$ per ogni $i = 1, \ldots, n$. Essendo ciascun A_i aperto, si ha che per ogni $i = 1, \ldots, n$ esiste r_i tale che $B(x, r_i) \subset A_i$. Definiamo $r = \min(r_1, \ldots, r_n)$, allora $B(x,r) \subset A_i$ per ogni $i = 1, \ldots, n$ e quindi $B(x,r) \subset \bigcap_{i=1}^{n} A_i = E$. Da qui la tesi. $\square$

* * *

Dal precedente teorema e per passaggio ai complementari si ottiene il risultato seguente.

Teorema 2.10. *Sia $\mathcal{C}$ una famiglia qualsiasi di sottoinsiemi chiusi di X. Allora è chiuso anche l'insieme $\bigcap_{C\in\mathcal{C}} C$. Dato $n \in I\!N$, sia $\{C_1, \dots, C_n\}$ una collezione finita di sottoinsiemi chiusi di X. Allora è chiuso anche l'insieme $\bigcup_{i=1}^{n} C_i$.*

Osservazione 2.11. Si osservi che l'intersezione infinita di insiemi aperti non è necessariamente un insieme aperto. A tale proposito si prenda, ad esempio, $X = I\!R$ e la famiglia di aperti $A_n = (-1/n, 1/n)$ oppure $\widetilde{A}_n = (-1, 1/n)$ al variare di $n \in I\!N$. Si può facilmente verificare che $\bigcap_{n\in I\!N} A_n = \{0\}$, che risulta essere un insieme chiuso, mentre $\bigcap_{n\in I\!N} \widetilde{A}_n = (-1, 0]$ che risulta essere un insieme nè aperto nè chiuso. Analogamente, l'unione infinita di insiemi chiusi non è necessariamente un insieme chiuso. A tale proposito si prenda, ad esempio, $X = I\!R$ e la famiglia di chiusi $C_n = [1/n, 1 - 1/n]$ oppure $\widetilde{C}_n = [0, 1 - 1/n]$ al variare di $n \in I\!N$. Si può facilmente verificare che $\bigcup_{n\in I\!N} C_n = (0, 1)$, che risulta essere un insieme aperto, mentre $\bigcup_{n\in I\!N} \widetilde{C}_n = [0, 1)$ che risulta essere un insieme nè aperto nè chiuso.

Definizione 2.12. Se A è un sottoinsieme di E tale che $\overline{A} = \overline{E}$, si dice che A è *denso* in E.

Ad esempio l'insieme $\mathbf{Q}$ dei numeri razionali e l'insieme $I\!R \setminus \mathbf{Q}$ dei numeri irrazionali sono entrambi densi nell'insieme $I\!R$ dei numeri reali.

3. Insiemi limitati.

Definizione 3.1. Un insieme $E \subseteq X$ si dice *limitato* se esiste $r > 0$ tale che $E \subseteq B(0, r)$. Chiameremo, inoltre, *diametro* di E il numero reale non negativo (ed eventualmente infinito) definito da $diam(E) := \sup\{d(x, y) : x, y \in E\}$. Se $diam(E) = +\infty$, diremo che E è illimitato.

Non è difficile dimostrare che un insieme E è limitato se e solo se il suo diametro è finito.

Osservazione 3.2. Se E è un sottoinsieme limitato di $I\!R$, allora il sup e l'inf di E sono finiti ed, in particolare, essi sono dei punti di accumulazione per E (Provarlo per esercizio). Inoltre, se E è anche chiuso, l'estremo superiore e quello inferiore appartengono ad E, cioè E possiede massimo e minimo.

4. Insiemi connessi, insiemi convessi, insiemi compatti.

Dati due insiemi non vuoti A e B contenuti in X, diremo che essi sono *disgiunti* se

$$\overline{A} \cap B = \emptyset \qquad \text{e} \qquad A \cap \overline{B} = \emptyset.$$

In altre parole A e B sono disgiunti se non hanno punti in comune ed inoltre nessun punto del primo insieme è di accumulazione per il secondo e viceversa.

Definizione 4.1. Sia E un sottoinsieme di X; esso si dirà *connesso* se non è unione di due insiemi non vuoti e disgiunti. Se E non è connesso si dirà *sconnesso.*

ESEMPIO 4.2. Sia $X = I\!R^2$. L'insieme $E = B(0,2) \cup B(3,1)$ è sconnesso, mentre gli insiemi $E_1 = \overline{B}(0,2) \cup B(3,1)$ ed $E_2 = \overline{B}(0,2) \cup \overline{B}(3,1)$ sono connessi.

Il seguente teorema caratterizza i sottoinsiemi connessi di $I\!R$.

Teorema 4.3. *Un sottoinsieme E della retta reale $I\!R$ è connesso se e solo se è un intervallo.*

Per la definizione che segue sarà necessario utilizzare la struttura di spazio vettoriale di cui è dotato $I\!R^N$ $(N \geq 1)$.

Definizione 4.4. Sia $E \subseteq X$; diremo che esso è *convesso* se

$$\lambda x + (1-\lambda)y \in E \qquad \forall x, y \in E \text{ e } \forall \lambda \in [0,1].$$

L'insieme $\{\lambda x + (1-\lambda)y\}$ al variare di $\lambda \in [0,1]$ e con x, y fissati in E si chiama *segmento congiungente i punti x e y.*

Osservazione 4.5. In $I\!R$ tutti gli insiemi connessi sono convessi e viceversa. In $I\!R^N$ per $N > 1$, invece, ogni insieme convesso è connesso, ma chiaramente non vale il viceversa, basta pensare all'esempio 4.2. Si può dimostrare, però, che se un insieme E aperto è connesso e se $x, y \in E$ esiste sempre una curva γ che congiunge x e y e che è interamente contenuta in E. Ovviamente tale curva non sarà in generale un segmento.

Sia $\mathcal{I}$ un insieme arbitrario di indici (finito o infinito, numerabile o non). Una collezione di insiemi aperti $\{A_i,\ i \in \mathcal{I}\}$ contenuti in X è detta *copertura* di un sottoinsieme K di X se

$$K \subseteq \bigcup_{i \in \mathcal{I}} A_i.$$

Definizione 4.6. Un insieme $K \subseteq X$ si dice *compatto* se da ogni sua copertura è possibile estrarre una famiglia finita di aperti che sia ancora una copertura di K (tale famiglia è detta *sottocopertura* dell'insieme K).

Il seguente teorema di Heine-Borel fornisce una semplice caratterizzazione dei compatti.

Teorema 4.7. *Ogni sottoinsieme di $I\!R^N$ è compatto se e solo se è chiuso e limitato.*

5. <u>Norma e prodotto scalare.</u>

Definizione 5.1. Sia $\|\ \| : X \to [0, +\infty)$ una funzione soddisfacente le seguenti proprietà:

$$\begin{aligned}
&i) \quad \|x\| = 0 \quad \text{se e solo se} \quad x = 0 \ \text{(annullamento)};\\
&ii) \quad \|\lambda x\| = |\lambda|\ \|x\|, \quad \forall \lambda \in I\!R \ \ \forall x \in X \ \text{(omogeneità)};\\
&iii) \ \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|, \quad \forall x, y \in X \ \text{(subadditività)}.
\end{aligned}$$

La funzione $\|\ \|$ è detta *norma* in X.

Osserviamo che dalle *ii*) e *iii*) della definizione 5.1, segue subito che vale

$$\Big| \|x\| - \|y\| \Big| \leq \|x - y\| \qquad \forall x, y \in X. \tag{5.1}$$

ESEMPIO 5.2.

1) Il valore assoluto in $I\!R$ è una norma e per l'usuale distanza euclidea si ha $d(x, y) = \|x - y\|$.

2) In $I\!R^N$ $(N > 1)$ la funzione definita da

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} x_i^2}.$$

è una norma ed ancora, per l'ususale distanza euclidea, si ha $d(x, y) = \|x - y\|$.

Non è difficile vedere che le funzioni definite da $\|x\|_1 = d_1(x, 0)$ e $\|x\|_2 = d_2(x, 0)$, ove d_1 e d_2 sono le metriche introdotte nell'esempio 1.2, sono anch'esse delle norme.

A partire da una norma $\| \ \|$ qualsiasi, si può sempre introdurre una distanza $d(\ , \ )$, definendo $d(x, y) = \|x - y\|$. Non vale il viceversa.

Se non sarà diversamente specificato, noi consideremo sempre le norme dei precedenti esempi 1) e 2), che sono, rispettivamente, la *norma euclidea* su $I\!R$ e la *norma euclidea* su $I\!R^N$.

Definizione 5.3. Sia $(\ , \ ) : X \times X \to I\!R$ una funzione soddisfacente le seguenti proprietà:

i) $\forall x \in X, \quad (x, x) \geq 0 \quad$ e $\quad (x, x) = 0 \quad$ se e solo se $\quad x = 0$ (annullamento);

ii) $(x, y) = (y, x), \quad \forall x, y \in X$ (simmetria);

iii) $(\lambda x + \mu y, z) = \lambda(x, z) + \mu(y, z) \quad \forall \lambda, \mu \in I\!R, \ \forall x, y, z \in X$ (linearità).

La funzione $(\ , \ )$ è detta *prodotto scalare* su $X \times X$.

A partire da un prodotto scalare $(\ , \ )$ qualsiasi, si può sempre introdurre una norma $\| \ \|$, definendo $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$, e quindi una distanza $d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{(x - y, x - y)}$. Non vale il viceversa.

Per il prodotto scalare valgono le seguenti disuguaglianze:

$|(x, y)| \leq \|x\| \ \|y\| \qquad \forall x, y \in X \qquad$ (disuguaglianza di Schwarz),

$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) \qquad \forall x, y \in X \qquad$ (relazione del parallelogramma),

$(x, y) = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2) \qquad \forall x, y \in X.$

ESEMPIO 5.4.

In $I\!R^N$ si può introdurre il prodotto scalare

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{N} x_i y_i.$$

Esso è detto *prodotto scalare euclideo* e si ha

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{N}(x_i-y_i)^2} = \sqrt{(x-y,x-y)} = \|x-y\| = d(x,y)$$

ove $\| \ \|$ e d sono rispettivamente la norma e la distanza euclidea.

In particolare, se $N=1$, esso è l'usuale prodotto fra numeri reali.

Osserviamo che nelle definizioni di norma e prodotto scalare si è utilizzata in modo essenziale la struttura di spazio vettoriale di cui è dotato $\mathbb{R}^N$; tale proprietà invece non ha rilevanza per introdurre la nozione di distanza, come si è visto nel primo paragrafo.

* * *

Concludiamo questa dispensa osservando che, in molte questioni future, sarà utile considerare, accanto alla retta reale $\mathbb{R}$, la cosiddetta retta reale estesa, che viene usualmente indicata con $\overline{\mathbb{R}}$ oppure $\widetilde{\mathbb{R}}$ oppure ancora $\mathbb{R}^*$ ed è definita da

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}.$$

Si conviene che per ogni $x \in \mathbb{R}$ si abbia $-\infty < x < +\infty$. Quindi ogni insieme non vuoto contenuto in $\overline{\mathbb{R}}$ ammette sempre estremo superiore in $\overline{\mathbb{R}}$.