

Tutoraggio Ingegneria Meccanica e Ingegneria energetica

Primo foglio di esercizi

- (1) Determinare inf e sup dei seguenti insiemi numerici e dire se si tratta di minimi o massimi.

$$E_1 := \left\{ \frac{3n-2}{2n} : n \in \mathbb{N} \right\},$$

$$E_2 := \left\{ \frac{t+1}{t-2} : t \in \mathbb{R}, t > 2 \right\},$$

$$E_3 := \{3n^2 + 3n - 1 : n \in \mathbb{N}\},$$

$$E_4 := \{3n^2 - 1000n - 1 : n \in \mathbb{N}\},$$

$$E_5 := \{|x| : x^2 + x < 2\},$$

$$E_6 := \left\{ \frac{(-1)^n}{n} : n \in \mathbb{N} \right\},$$

$$E_7 := \left\{ \frac{n-1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\},$$

$$E_8 := \left\{ (-1)^n \frac{n-1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\},$$

$$E_9 := \{x \in \mathbb{R} : x^2 \leq 3\},$$

$$E_{10} := \{x \in \mathbb{R} : x \cdot |x| > 2\},$$

$$E_{11} := \{x \in \mathbb{R} : -2 \leq \log(e^{3x} - 13) < 5\}$$

- (2) Risolvere in campo complesso le seguenti equazioni

$$\begin{aligned} z^6 - 6z^3 + 5 &= 0, & z^3 - z^2 + z &= 0, \\ z|z|^2 - (1 + 4\sqrt{3})i\bar{z} &= 0, & z^2 - 3iz - 2 &= 0, \\ z^2 + iz + i\frac{\sqrt{3}}{4} &= 0, & z^2 - (2+i)z + 3i - 3 &= 0. \end{aligned}$$

- (3) Per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ l'equazione $z^2 - az + a^2 - 1 = 0$ ha radici reali?
- (4) Per quali valori di $a \in \mathbb{C}$ l'equazione $z^2 - az + a^2 = 0$ ha radici reali?
- (5) Per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ l'equazione $z^{105} - az^{24} + 1231 = 0$ ha almeno una radice reale?
- (6) Calcolare $\sqrt{1-2i}$, $\sqrt[3]{\rho(\cos\theta - i\sin\theta)}$, $\sqrt[4]{1}$, $\sqrt[5]{-i}$ e darne un'interpretazione grafica.

(7) Trovare tutti i numeri complessi z che soddisfano il seguente sistema equazioni

$$\begin{cases} z^2 \bar{z} - \bar{z} z = -\bar{z} \\ (z^3 + \bar{z})^3 = 1. \end{cases}$$

(8) Indicando con $z_0 \in \mathbb{C}$ la soluzione dell'equazione

$$\bar{z} - \operatorname{Im}(z)z + 2 = 0,$$

con il modulo maggiore, calcolare $\sqrt[4]{z_0}$.

(9) Sia z un numero complesso tale che

$$0 \leq \operatorname{Im}(z) \leq \frac{1}{4}.$$

Provare che il numero $z^3 - 3z + i$ non è reale.

(10) Usando la conoscenza dei grafici delle funzioni elementari, tracciare i grafici delle seguenti funzioni

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \frac{\sin 3x}{4} + \sqrt{2} \\ f_2(x) &= 1 + \frac{3}{x-2} \\ f_3(x) &= e^{x-\sqrt{5}} + 3 \\ f_4(x) &= \log(\sqrt{2} + x) + 11 \\ f_5(x) &= \arctan x - 7. \end{aligned}$$

(11) Calcolare i valori delle seguenti espressioni

$$\arcsin \sin 75\pi, \quad \arccos \cos -\frac{21}{4}\pi, \quad \arctan \tan 2\pi/3.$$