Prescritto di Analisi Matematica II
21-12-2017

Nome, cognome e matricola: ______________________________

ESERCIZIO 1

Sia data

$$f(x) = \begin{cases} -x & x \in (-\pi, 0) \\ x^2 & x \in [0, \pi] \end{cases}$$

ripetuta per periodicità in $\mathbb{R}$. Determinare la serie di Fourier.

ESERCIZIO 2 Dato

$$T = \{(x,y,z) : 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1-x, 0 \le z \le 1-x-y\}$$

Calcolare

$$\int\int\int_T xz dx dy dz$$

ESERCIZIO 3 Data la funzione

$$f(x,y) = x^4 + 2y^2 - 8x^2 + 4xy$$

Classificare gli eventuali punti stazionari

Sia data

$$f(x) = \begin{cases} -x & x \in (-\pi, 0) \\ x^2 & x \in [0, \pi] \end{cases}$$

ripetuta per periodicità in $\mathbb{R}$. Determinare la serie di Fourier.

Soluzione: Avremo

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

dove

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx$$
$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} -x \cos kx \, dx + \int_{0}^{\pi} x^2 \cos kx \, dx$$
$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} -x \sin kx \, dx + \int_{0}^{\pi} x^2 \sin kx \, dx$$

$$a_0 = \frac{1}{6}\pi(3 + 2\pi)$$

Calcolando l'integrale, si deve tenere conto che $\sin k\pi = 0$ e $\cos k\pi = (-1)^k$. Ponendo uguale a zero la costante additiva

$$\int -x \cos kx dx = -\frac{1}{k^2} \cos kx - \frac{1}{k} x \sin kx$$

$$\int -x \sin kx dx = -\frac{1}{k^2} \sin kx + \frac{1}{k} x \cos kx$$

$$\int x^2 \cos kx dx = \frac{1}{k} \int x^2 (\sin kx)' dx = \frac{1}{k} x^2 \sin kx + \frac{2}{k} \int -x(\sin kx) dx =$$
$$\frac{1}{k} x^2 \sin kx + \frac{2}{k}\left(-\frac{1}{k^2} \sin kx + \frac{1}{k} x \cos kx \right) = \frac{2x \cos kx}{k^2} + \frac{(-2 + k^2x^2) \sin kx}{k^3}$$

$$\int x^2 \sin kx dx = -\frac{1}{k} \int x^2 (\cos kx)' dx = -\frac{1}{k} x^2 \cos kx - \frac{2}{k} \int -x \cos kx dx =$$
$$-\frac{1}{k} x^2 \cos kx - \frac{2}{k}\left(-\frac{1}{k^2} \cos kx - \frac{1}{k} x \sin kx \right) = \frac{1}{k^2} x \sin kx + \frac{(2 - k^2x^2) \cos kx}{k^3}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} -x\cos kx dx = \frac{1}{\pi}\frac{-1+(-1)^k}{k^2}$$
$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x^2\cos kx dx = 2\frac{(-1)^k}{k^2}$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} -x\cos kx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x^2\cos kx dx = 2\frac{(-1)^k}{k^2} + \frac{-1+(-1)^k}{\pi k^2}$$
$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} -x\sin kx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x^2\sin kx = \frac{(-1)^k}{k} + \frac{-2+(2-k^2\pi^2)(-1)^k}{k^3\pi}$$

Esercizio 2. Dato

$$T = \{(x,y,z) : 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1-x, 0 \le z \le 1-x-y\}$$

Calcolare

$$\int\int\int_T xzdxdydz$$

$$\int\int\int_T xzdxdydz = \int_0^1 xdx\int_0^{1-x} dy\int_0^{1-x-y} zdz =$$
$$\frac{1}{2}\int_0^1 dx\int_0^{1-x} x(1-x-y)^2dy = \frac{1}{6}\int_0^1 x(1-x)^3dx = \frac{1}{120}$$

Esercizio 3.

Data la funzione

$$f(x,y) = x^4 + 2y^2 - 8x^2 + 4xy$$

classificare gli eventuali punti stazionari

$$f_x(x,y) = 4x^3 - 16x + 4y = 0$$
$$f_y(x,y) = 4y + 4x = 0$$

$$f_x(x,y) = 4x^3 - 16x - 4x = 0$$
$$y = -x$$

$$f_x(x,y) = 4x^3 - 16x - 4x = 0 \iff x = 0 \quad x = \pm\sqrt{5}$$

$$(0,0), (-\sqrt{5},\sqrt{5}), (\sqrt{5},-\sqrt{5})$$

$$f_{xx} = 12x^2 - 16$$
$$f_{yy} = 4$$
$$f_{xy} = 4$$

Dall'esame del segno della matrice hessiana deduciamo che

in $(0,0)$ il segno della matrice hessiana risulta negativo pertanto il punto è di sella; in $(\sqrt{5},-\sqrt{5})$, $(-\sqrt{5},\sqrt{5})$ il segno della matrice hessiana risulta positivo, dal segno di f_{xx} nel punto deduciamo che il punto è di minimo relativo;