1 Lezione n.1 : Serie di Potenze

1.1 La Serie geometrica

Consideriamo serie geometrica di ragione x

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$$

Ridotta n-sima

$$s_n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1}$$

.

Se $x = 1$ si ha

$$s_n = 1 + 1 + \cdots + 1 = n.$$

Sia $x \neq 1$. Si ha

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} = \frac{1 - x^n}{1 - x}$$

Se $|x| < 1$ allora $\lim_{n\to\infty} x^n = 0$ e pertanto

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - x^n}{1 - x} = \frac{1}{1 - x}.$$

Se $x > 1$, poichè $\lim_{n\to\infty} x^n = +\infty$ si ha

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{x^n - 1}{x - 1} = \frac{1}{x - 1} \cdot \lim_{n\to\infty} x^n - \frac{1}{x - 1} = +\infty$$

Sia ora $x = -1$,

$$s_n = \frac{1 - (-1)^n}{2} = \begin{cases} 0 & , \quad n = 2p \\ 1 & , \quad n = 2p + 1 \end{cases}$$

Pertanto la successione $(s_n)_{\mathbb{N}}$ non è regolare.
Sia infine $x < -1$. Possiamo scrivere $x = -|x|$, e quindi

$$\begin{aligned} s_n &= \frac{1 - (-|x|)^n}{1 + |x|} = \frac{1 - (-1)^n |x|^n}{1 + |x|} \\ &= \begin{cases} \dfrac{1 - |x|^{2p}}{1 + |x|}, & n = 2p \\ \dfrac{1 + |x|^{2p-1}}{1 + |x|}, & n = 2p - 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Ne segue che $S_{2p} \to -\infty$ e $S_{2p-1} \to +\infty$ e pertanto $\nexists \lim_{n\to\infty} s_n$
Allora

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \lim_{n\to\infty} s_n = \begin{cases} +\infty & x \geq 1 \\ \dfrac{1}{1 - x} & x \in (-1, 1) \\ \nexists & x \leq -1 \end{cases}$$

1.2 Definizione e prime proprietà

La Serie geometrica costituisce un caso particolare di serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

quando $a_n = 1 \quad n = 0, 1, \ldots\ldots$ e $x_0 = 0$.
In generale i coefficienti a_n costituiscono una successione di numeri reali.
Con una traslazione $y = x - x_0$ possiamo ricondurci al caso $x_0 = 0$
Infatti supponiamo di dover studiare l'insieme di convergenza della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} (x - 1)^n$$

Si pone $y = x - 1$ e si studia

$$\sum_{n=0}^{\infty} y^n,$$

che sappiamo essere convergente per $|y| < 1$.

$$|y| < 1 \iff |x - 1| < 1 \iff -1 < x - 1 < 1 \iff 0 < x < 2$$

Concentriamo la nostra analisi sul ruolo dei coefficienti a_n. Osserviamo di aver incontrato già le serie di potenze con nello studio delle serie numeriche (oltre le serie geometriche). Facciamo alcuni esempi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n.$$

Per il criterio del rapporto per le serie numeriche la serie converge (assolutamente) per $|x| < 1$. Il caso $|x| = 1$ deve essere studiato separatamente per $x = 1$ la serie diverge (serie armonica), per $x = -1$ la serie converge (Criterio di Leibniz) pertanto l'insieme dove la serie converge è dato da $(-1, 1) \cup \{-1\}$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} x^n.$$

Per il criterio del rapporto per le serie numeriche la serie converge (assolutamente) per $|x| < 1$. $|x| = 1$ deve essere studiato separatamente per $x = 1$ la serie converge, per $x = -1$ la serie converge (Criterio di Leibniz) pertanto l'insieme dove la serie converge è dato da $(-1, 1) \cup \{-1, 1\}$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n.$$

Per il criterio del rapporto per le serie numeriche la serie converge (assolutamente) per ogni x reale.

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n.$$

Per il criterio del rapporto per le serie numeriche la serie converge solo per $x = 0$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} 3^n x^n.$$

Per il criterio del rapporto per le serie numeriche la serie converge (assolutamente) per $|x| < \frac{1}{3}$. $|x| = \frac{1}{3}$ deve essere studiato separatamente per $x = \frac{1}{3}$ la serie diverge, per $x = -\frac{1}{3}$ la serie è indeterminata.

Vediamo negli esempi che l'insieme di convergenza è un intervallo, l'analisi nei punti di estremo dell'intervallo varia da caso a caso. Indichiamo con E l'insieme dei punti x in cui la serie converge e definiamo raggio di convergenza della serie

$$r = \sup E$$

Osserviamo che questa definizione è estendibile al caso complesso. Sia $z \in \mathbb{C}$. Ripartendo dalla serie geometrica e ricordando che

$$|z| = \sqrt{(\Re z)^2 + (\Im z)^2} \text{ è il modulo di } z.$$

abbiamo che la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

converge se $|z| < 1$. Nel piano complesso $(\Re z, \Im z)$ l'insieme $\sqrt{(\Re z)^2 + (\Im z)^2} < 1$ individua il cerchio di centro 0 e raggio 1 privato della circonferenza. Il raggio di convergenza (in questo caso si ha perfetta corrispondenza con l'immagine grafica) è 1.

Dimostriamo ora che l'intuizione maturata sulla struttura dell'insieme di convergenza corrisponde a un risultato matematico.

Proposizione 1. *Se la serie*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

converge in un punto x_1 *allora converge (assolutamente) in ogni punto* x *tale che* $|x| < |x_1|$.

Dimostrazione. Sappiamo che la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_1^n$$

converge. Assumiamo $x_1 \neq 0$. Ne segue dalla condizione necessaria di convergenza

$$\lim_{n \to +\infty} a_n x_1^n = 0,$$

ne segue che esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che per $n > N$

$$|a_n x_1^n| < 1.$$

Allora per $n > N$

$$|a_n x^n| = |a_n x_1^n| \left|\frac{x^n}{x_1^n}\right| = |a_n x_1^n| \left|\frac{x}{x_1}\right|^n$$

Quindi tenuto conto che $|a_n x_1^n| < 1$

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n x^n \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \left|\frac{x}{x_1}\right|^n$$

L'ultima serie converge se $|x| < |x_1|$. $\square$

2 Serie di Potenze ed equazione di Bessel di ordine zero

Illustriamo il Metodo di Frobenius per illustrare come determinare la soluzione dell'equazione di Bessel di ordine 0.

$$xy''(x) + y'(x) + xy(x) = 0, \qquad x > 0$$

Ricordiamo le equazioni di Bessel di ordine n

$$x^2 y''(x) + xy'(x) + (x^2 - n^2)y(x) = 0, \qquad x > 0$$

Aggiungiamo la condizione in $x = 0$, $y(0) = 1$,

$$y'(x) = -xy''(x) - xy(x), \qquad y'(0) = 0$$

Ricapitolando vogliamo risolvere

$$\begin{cases} xy''(x) + y'(x) + xy(x) = 0, & x > 0, \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 \end{cases}$$

Assumiamo che la soluzione sia esprimibile in serie di potenze

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

dalla condizione $y(0) = 1$ si ricava $a_0 = 1$. Dunque

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 1 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + \cdots = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = 1 + \sum_{m=0}^{\infty} a_{m+1} x^{m+1}$$

Calcoliamo i singoli termini

$$xy(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1}$$

$$y'(x) = a_1 + \sum_{n=0}^{\infty} (n+2) a_{n+2} x^{n+1}$$

$$y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n \qquad xy''(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^{n+1}$$

Sostituendo

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^{n+1} + a_1 + \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)a_{n+2}x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+1} = 0$$

Riordinando

$$a_1 + \sum_{n=0}^{\infty}\Big(a_n + (n+2)^2a_{n+2}\Big)x^{n+1} = 0.$$

Ricaviamo $a_0 = 1, \quad a_1 = 0.$

$$a_n + (n+2)^2a_{n+2} = 0 \qquad a_{n+2} = -\frac{1}{(n+2)^2}a_n$$

Se n è dispari $a_n = 0$, se n è pari allora $n = 2k\ k \in \mathbb{N}$

$$a_{2(k+1)} = -\frac{1}{2^2(k+1)^2}a_{2k}$$

$$a_2 = -\frac{1}{2^2}a_0 = -\frac{1}{2^2}$$

$$a_4 = -\frac{1}{2^2}\frac{1}{2^2}a_0 = \frac{1}{2^2}\frac{1}{2^2}\frac{1}{2^2} = \frac{1}{2^2}\frac{1}{2^4}$$

$$a_6 = -\frac{1}{2^2}\frac{1}{3^2}a_4 = -\frac{1}{2^2}\frac{1}{3^2}\frac{1}{2^2}\frac{1}{2^4} = -\frac{1}{2^6}\frac{1}{(3!)^2}$$

$$\cdots$$

$$\cdots$$

$$\cdots$$

$$\begin{cases} a_{2n+1} = 0, \\ a_{2n} = (-1)^n\frac{1}{2^{2n}}\frac{1}{(n!)^2}, \end{cases}$$

Otteniamo

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2^{2n}}\frac{1}{(n!)^2}x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(n!)^2}\frac{x^{2n}}{2^{2n}} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(n!)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}$$

funzione di Bessel di ordine 0.

3 Lezione n.2 : Serie di Potenze

3.1 Criteri per la determinazione del raggio di convergenza

Teorema 3.1. *(Criterio di Cauchy) Se esiste il limite (anche $+\infty$)*

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = l,$$

allora

$$r = \frac{1}{l}$$

Teorema 3.2. *(Criterio di D'Alembert) Sia $a_n \neq 0$, per ogni n. Se esiste il limite (anche $+\infty$)*

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = l,$$

allora

$$r = \frac{1}{l}.$$

Se $l = +\infty$ allora $r = 0$, se $l = 0$ allora $r = +\infty$

Esercizio 3.3. *Calcolare il raggio di convergenza della serie di potenze*

$$\sum_{n=0}^{\infty} n\left(\frac{x}{3}\right)^n.$$

Risulta

$$\sum_{n=0}^{\infty} n\left(\frac{x}{3}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} n\left(\frac{1}{3}\right)^n x^n$$

Calcoliamo

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(n+1)\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{n\left(\frac{1}{3}\right)^n} = \frac{1}{3}(1+\frac{1}{n}).$$

Ne segue $l = \frac{1}{3}$ e $r = 3$

Ricapitolando: data la serie di potenze, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ determiniamo il raggio di convergenza r (i criteri non fanno intervenire x). Allora la serie converge assolutamente per $|x| < r$, non converge per $|x| > r$, in generale nulla si può dire per $|x| = r$.

Ricapitolando

Teorema 3.4. *Data la serie di potenze si verifica sempre uno dei seguenti casi*

- *la serie converge per $x = 0$*
- *la serie converge per ogni x reale*
- *la serie converge per $|x| < r$ e non converge per $|x| > r$*

4 Serie di Potenze: Integrale e Derivata

4.1 Derivazione termine a termine

Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ una serie di potenze con raggio di convergenza $r > 0$ e con somma

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad |x| < r.$$

La serie derivata

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

ha lo stesso raggio di convergenza della serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ (applicare il criterio di D'Alembert), la somma $f(x)$ è derivabile e vale

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \qquad |x| < r.$$

Vediamo un'applicazione del risultato.

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n \qquad |x| < 1$$

$$\frac{1}{(1+x)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} n x^{n-1} \qquad |x| < 1$$

4.2 Integrazione termine a termine

Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ una serie di potenze con raggio di convergenza $r > 0$ e con somma

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad |x| < r.$$

Si ha

$$\int_0^x f(s) ds = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} \qquad |x| < r$$

Utilizziamo questo risultato.

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n} \qquad |x| < 1,$$

Integrando

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} x^{2n+1} \qquad |x| < 1$$

Possiamo utilizzare il risultato per integrare per serie alcune funzioni non integrabili elementarmente. Per $a > 0$ calcoliamo

$$\int_0^a \frac{\sin x}{x} d\,x = \int_0^a \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} a^{2n+1}.$$

Introduciamo la funzione degli errori introdotta da Gauss

$$\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n!} t^{2n} dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n!(2n+1)} x^{2n+1}.$$

5 Lezione n.3: Serie di Taylor

Data una funzione $f \in C^\infty(x_0 - r, x_0 + r)$ la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^n(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

si dice serie di Taylor relativa al punto x_0. Se vale

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^n(x_0)}{n!} (x - x_0)^n \qquad |x - x_0| < r,$$

la funzione f si dice sviluppabile in serie di Taylor per x: $|x - x_0| < r$.

Il seguente esempio mostra che che esistono funzioni $f \in C^\infty(-r, r)$ che non sono uguali alla serie di Taylor.

Esempio 5.1.

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

La funzione presenta derivate tutte nulle in $x_0 = 0$, e quindi la serie di Taylor ad essa relativa vale 0 *e non coincide con la funzione.*

Funzioni analitiche (in senso reale).

Definizione 5.2. *Una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ (I intervallo con $(x_0 - r, x_0 + r) \subset I$) si dice analitica in senso reale se è sviluppabile in serie di Taylor in un intorno $(x_0 - r, x_0 + r)$ di x_0. f si dice analitica in I se è analitica in ogni punto di I.*

Ci occupiamo di condizioni di sviluppabilità di una funzione in serie di Taylor.

Definizione 5.3. *Se f è derivabile $n + 1$ volte, il resto dato dalla formula di Taylor*

$$r(x_0, n, x) = r_n(x_0, x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^k(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

Sappiamo (resto di Peano) che

$$r(x_0, n, x) = o((x - x_0)^n) \qquad x \to x_0.$$

Ci occupiamo di condizioni per cui

$$r(x_0, n, x) \to 0 \qquad n \to +\infty$$

5.1 Resto Integrale e di Lagrange

Deduciamo ora altre espressioni del resto

Teorema 5.4. *Se f è derivabile $n+1$ volte, il resto si può esprimere*

$$r_n(x_0, x) = \int_{x_0}^{x} \frac{f^{n+1}(t)}{n!}(x-t)^n dt$$

Dimostrazione. La dimostrazione del risultato segue il principio di induzione. Per $n = 0$ il risultato segue da

$$f(x) - f(x_0) = \int_{x_0}^{x} f'(t)dt.$$

Assumiamo vera l'affermazione al passo $n-1$. Il resto al passo $n-1$ si esprime

$$r_{n-1}(x_0, x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^k(x_0)}{k!}(x-x_0)^k.$$

Si ha

$$\begin{aligned} r_{n-1}(x_0, x) = \int_{x_0}^{x} \frac{f^n(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1}dt = \int_{x_0}^{x} \frac{f^n(t)}{(n-1)!}\left[-\frac{(x-t)^n}{n}\right]' dt = \\ -\left[\frac{(x-t)^n}{n!}f^n(t)\right]_{x_0}^{x} + \int_{x_0}^{x} f^{n+1}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}dt \\ = \frac{(x-x_0)^n}{n!}f^n(x_0) + \int_{x_0}^{x} f^{n+1}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}dt \end{aligned}$$

In conclusione

$$r(x_0, n-1, x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^k(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = \frac{(x-x_0)^n}{n!}f^n(x_0) + \int_{x_0}^{x} f^{n+1}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}dt,$$

e quindi

$$r_n(x_0, x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^k(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^k(x_0)}{k!}(x-x_0)^k - \frac{(x-x_0)^n}{n!}f^n(x_0) =$$

$$\int_{x_0}^{x} f^{n+1}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}dt.$$

□

Dalla formula del resto integrale si deduce la formula del resto di Lagrange.

Teorema 5.5. *Se f è derivabile $n+1$ volte in un intervallo I e x, x_0 sono punti di I, esiste un punto ξ compreso tra x e x_0 tale che*

$$r_n(x_0, x) = f^{n+1}(\xi)\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!},$$

Dimostrazione.

$$r_n(x_0, x) = \int_{x_0}^{x} f^{n+1}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}dt =$$

Assumiamo $x > x_0$. In $[x_0, x]$ applichiamo il teorema della media integrale

$$m \leq f^{n+1}(t) \leq M,$$

essendo

$$m = \min_{[x_0,x]} f^{n+1}(t) \qquad M = \max_{[x_0,x]} f^{n+1}(t).$$

Abbiamo

$$m\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} \leq \int_{x_0}^{x} f^{n+1}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}dt \leq M\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$$

Ossia

$$m \leq \left[\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}\right]^{-1} \int_{x_0}^{x} f^{n+1}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}dt \leq M$$

Dal teorema dei valori intermedi applicato a f^{n+1}, si ha che esiste ξ per cui

$$f^{n+1}(\xi) = \left[\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}\right]^{-1} \int_{x_0}^{x} f^{n+1}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}dt,$$

da cui la tesi. □

5.2 Condizioni di convergenza

Teorema 5.6. *Se la funzione f è derivabile infinite volte in un intervallo (a, b) e se esistono due numeri reali L e M tali che*

$$|f^{(n)}(x)| \leq ML^n \qquad \forall x \in (a, b) \quad \forall n,$$

allora per ogni $x_0 \in (a, b)$ la funzione è sviluppabile in serie di Taylor centrata in x_0.

Esempi di funzioni analitiche in $\mathbb{R}$: e^x, $\sin x$, $\cos x$. La dimostrazione segue dall'espressione del resto di Lagrange.

5.3 Gerarchia degli spazi nel caso reale

$C_0(I) \supset C^1(I) \supset C^2(I) \supset C^3(I) \cdots \supset C^\infty(I) \supset$ Insieme Funzioni Analitiche(I)

La funzione $\sin x$ è derivabile di ogni ordine in ogni punto di $\mathbb{R}$. $\sin x \in C^\infty(\mathbb{R})$, ed è una funzione analitica.

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

è derivabile di ogni ordine in ogni punto di $\mathbb{R}$. ma non è una funzione analitica perché la serie di Taylor ad essa relativa vale 0 e

$$f(x) \neq 0$$

6 Esercizi

Calcolare il raggio di convergenza per la seguente serie di potenze

Esercizio 6.1.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n^n} x^n.$$

Esercizio 6.2. *Risolvere con il Metodo di Frobenius il problema dell'oscillatore armonico*

$$y''(x) + y(x) = 0, \qquad y(0) = y_0 \qquad y'(0) = y_1.$$

Esercizio 6.3. *Alcune funzioni espresse in serie di potenze:*

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n,$$

$$e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n,$$

$$e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^{2n},$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1},$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n},$$

$$\operatorname{ch} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} x^{2n}$$

$$\operatorname{sh} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \qquad |x| < 1$$

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n \qquad |x| < 1$$

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n} \qquad |x| < 1$$