Analisi Matematica II Elettronica Comunicazioni III parte

Docente Prof.ssa Paola Loreti

Nucleo di Dirichlet

$$d_n = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos(kx)$$

Si ha

$$d_n = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos(kx) = \frac{\sin((n+\frac{1}{2})x)}{2\sin(\frac{x}{2}))}$$

Infatti sommiamo da 1 a n

$$\sin((k+\frac{1}{2})x) - \sin((k-\frac{1}{2})x) = 2\sin(\frac{x}{2})\cos(kx)$$

$$\sum_{k=1}^{n}(\sin((k+\frac{1}{2})x) - \sin((k-\frac{1}{2})x)) = \sin((n+\frac{1}{2})x) - \sin(\frac{x}{2})$$

Inoltre

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} d_n(t)dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} d_n(t)dt = \frac{1}{2}.$$

Segue da $d_n(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos(kt)$ ed effettuando l'integrazione.

Formula di Dirichlet

Teorema.

Sia f periodica di periodo 2π integrabile in $[-\pi, \pi]$. La somma parziale $s_n(x)$ della serie di Fourier di f si può esprimere in termini del nucleo di Dirichlet (integrale di convoluzione)

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) d_n(t) dt,$$

ove

$$d_n(x) = \frac{\sin(n + \frac{1}{2})x}{2 \sin(\frac{x}{2})}$$

La dimostrazione si basa sul seguente calcolo. Per definizione di $s_n(x)$

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)[\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}(\cos(kx)\cos(ky)+\sin(kx)\sin(ky))dy] =$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)[\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}(\cos(k(x-y))]dy =$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(x+t)[\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}(\cos(kt)]dt =$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\frac{\sin((n+\frac{1}{2})t)}{2\sin(\frac{t}{2})}dt$$

Teorema di Convergenza Puntuale

Convergenza Puntuale Per ogni x reale la successione $s_n(x)$ converge a $f(x)$, ovvero per ogni $x \in \mathbb{R}$ e per ogni $\epsilon > 0$ esiste un indice $N(x, \epsilon)$ the che

$$|s_n(x) - f(x)| < \epsilon \quad \forall N > N(x, \epsilon)$$

Teorema Sia f una funzione periodica regolare a tratti su $\mathbb{R}$. Per ogni x reale la serie di Fourier converge alla media aritmetica tra il limite destro e il limite sinistro:

$$\frac{1}{2}\left[f(x_+) + f(x_-)\right],$$

e a $f(x)$ nei punti di continuità

Dobbiamo considerare

$$s_n(x) - \frac{1}{2}\Big[f(x_+) + f(x_-)\Big] = \frac{1}{\pi}\Big[\int_0^\pi (f(x+t) - f(x_+))\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin(\frac{t}{2})}dt +$$

$$\int_{-\pi}^0 (f(x+t) - f(x_-))\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin(\frac{t}{2})}dt\Big],$$

Ricordiamo

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^\pi f(x+t)d_n(t)dt$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi d_n(t)dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^0 d_n(t)dt = \frac{1}{2}$$

$$d_n(t) = \frac{\sin((n+\frac{1}{2})t)}{2\sin(\frac{t}{2})}$$

Poniamo

$$F(t) = \begin{cases} \frac{f(x+t)-f(x_+)}{2\sin(\frac{t}{2})} & 0 < t \leq \pi \\ 0 & t = 0 \\ \frac{f(x+t)-f(x_-)}{2\sin(\frac{t}{2})} & -\pi < t < 0 \end{cases}$$

Ne segue dalle ipotesi su f che esiste il limite per $t \to 0^+$ e per $t \to 0^-$ di F. Infatti

$$\lim_{t \to 0^+} F(t) = f'_+(x) \qquad \lim_{t \to 0^-} F(t) = f'_-(x)$$

F è continua a tratti in $[-\pi, \pi]$, dunque integrabile e limitata. Inoltre

$$s_n(x) - \frac{1}{2}\Big[f(x_+) + f(x_-)\Big] = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(t)\sin((n + \frac{1}{2})t)dt.$$

Del resto
$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(t)\sin((n+\frac{1}{2})t)dt =$$
$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(t)\cos\frac{t}{2}\sin(nt)dt + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(t)\sin\frac{t}{2}\cos(nt)dt$$
Dalla disuguaglianza di Bessel si deduce che
$$\int_{-\pi}^{\pi} F(t)\sin\frac{t}{2}\cos(nt)dt \to 0$$
per $n \to +\infty$.
$$\int_{-\pi}^{\pi} F(t)\cos\frac{t}{2}\sin(nt)dt \to 0$$
per $n \to +\infty$.
In conclusione
$$\int_{-\pi}^{\pi} F(t)\sin((n+\frac{1}{2})t)dt \to 0,$$
per $n \to +\infty$.

Calcolo di somme di serie.

- $$f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi < x \leq 0 \\ 1 & 0 < x \leq \pi \end{cases}$$

  prolungata in modo periodico in $\mathbb{R}$.
  La serie di Fourier risulta

  $$\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin((2k+1)x)}{2k+1}$$

  In $x = 0$ risulta $S = \frac{1}{2}$
  In $x = \frac{\pi}{2}$ si ottiene

  $$f(\frac{\pi}{2}) = 1 = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$$

  e

  $$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$$

- $$f(x) = x|x|,$$

  per $x \in [-\pi, \pi)$ e prolungata per periodicità in $\mathbb{R}$ determinare le serie di Fourier.

$$S = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} \left(-\frac{1}{k}\pi^2(-1)^k + \frac{2}{k^3}(-1)^k - \frac{2}{k^3} \right) \sin(kx).$$

$x = 0$ e $x = \pi$??

- $$f(x) = |x|,$$

  per $x \in [-\pi, \pi)$ e prolungata per periodicità in $\mathbb{R}$ determinare le serie di Fourier.

  $$S = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \cos(2k+1)x.$$

  $x = 0$

  $$f(0) = 0 = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$$

  $$\frac{\pi^2}{8} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$$

Forma esponenziale

$$a_0/2 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$$

$$c_k = \frac{1}{2}(a_k - ib_k)$$

$$c_{-k} = \frac{1}{2}(a_k + ib_k)$$

E' utile scrivere la serie di Fourier nella forma

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$$

Risulta per $n \neq m$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} e^{-imx} dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)x} dx = \frac{1}{2\pi} \frac{e^{i(n-m)x}}{i(n-m)} \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

In conclusione

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} e^{-imx} dx = \delta_{n,m}$$

Esponenziale complesso
Abbiamo definito l'esponenziale complesso

$$e^z = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!}$$

La scrittura permette di trattare agevolmente l'esponenziale complesso nella forma

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y),$$

In questo modo

$$e^z = u(x, y) + iv(x, y),$$

con

$$u(x, y) = e^x \cos y \qquad v(x, y) = e^x \sin y$$

$$|e^z| = e^x$$

Vale per $z, w \in \mathbb{C}$
$$e^{z+w} = e^z e^w$$

- Vale inoltre
$$e^{-iy} = \overline{e^{iy}}$$

La funzione esponenziale ha nel piano complesso risulta periodica di periodo $2\pi i$.

$$e^z = e^{x+iy} = e^{x+i(y+2\pi)} = e^{z+2\pi i}$$

Logaritmo complesso. Possiamo dare la definizione di logaritmo di un numero complesso $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$. Sia $z \neq 0$. $\ln z$ sono quei numeri $\omega = x + iy$ tali $e^{\omega} = z$.
Si ricava

$$e^{x}(\cos y + i\sin y) = r(\cos\theta + i\sin\theta) \iff x = \ln r \quad y = \theta + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Pertanto ogni numero complesso non nullo ha infiniti logaritmi

$$\ln z = \ln|z| + i(\arg z + 2k\pi)$$
$$\ln i = \ln|i| + i(\frac{\pi}{2} + 2k\pi) = i(\frac{\pi}{2} + 2k\pi)$$

Logaritmo principale

$$\arg z \in (-\pi, \pi], \quad k = 0$$

Possiamo ora definire z^{α} con α reale o complesso.

$$z^{\alpha} = e^{\alpha \ln z}$$

esempio:

$$i^{i} = e^{i\ln i} = e^{i(i(\arg i + 2k\pi))} = e^{-\frac{\pi}{2} - 2k\pi}$$

Tutti i valori sono numeri reali.

Calcolare (valore principale)

$$(1+i)^i =$$

$$(i+1)^i = e^{i\ln(i+1)} = e^{i(ln|i+1|+i(\arg(i+1))} = e^{i\ln\sqrt{2}-\frac{\pi}{4}} = e^{-\frac{\pi}{4}}e^{i\ln\sqrt{2}}$$

Norma euclidea

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$$

Intorno di centro x_0 e raggio δ.

$$\{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| < \delta\}$$

A aperto
Un insieme aperto A dello spazio euclideo: $\forall x \in A$ esiste un intorno di raggio $\delta > 0$ centrata in x interamente contenuto in A.

X Insieme di definizione

- $f(x,y) = \ln(2 - x^2 - y^2) \quad f(x,y) = \sqrt{4x^2 + 9y^2 - 36}$
- $f(x,y) = \ln(x^2 + y^2)$
- $f(x,y) = \ln(1 - x^2) + \ln(1 - y^2)$
- $f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2-4}$

Esercizio: disegnare l'insieme di definizione $f : X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
x_0 punto di accumulazione per X.
Per ogni numero reale $\epsilon > 0$ esiste un numero reale $\delta > 0$ tale che:
$|f(x) - l| < \epsilon$ per ogni $x \in X$ con $0 < \|x - x_0\| < \delta$

$$l = \lim_{x \to x_0} f(x)$$

Se esiste il limite l, il limite è unico per il teorema di unicità del limite

- Mostrare che un limite per una funzione di due o piu' variabili non esiste: basta trovare due cammini lungo i quali la funzione tende a due valori distinti.
- Metodo non utilizzabile per mostrare che il limite esiste: non basta mostrare che la funzione tende allo stesso valore percorrendo un certo numero di curve per dire che essa ammette limite: potrebbero esistere altre curve lungo le quali la funzione si comporta diversamente.

- Esempio di funzione che non ammette limite per $(x, y) \to (0, 0)$

$$f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

$$\lim_{(x, y=mx) \to (0,0)} \frac{1 - m^2}{1 + m^2} = \frac{1 - m^2}{1 + m^2}$$

- Esempio di funzione che non ammette limite per $(x, y) \to (0, 0)$ anche se $\lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x, mx) = 0$

$$f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^4}$$

Si ha

$$f(x, mx) = \frac{x(mx)^2}{x^2 + (mx)^4} = \frac{m^2 x}{1 + m^4 x^2},$$

quindi

$$\lim_{(x, y=mx) \to (0,0)} f(x, mx) = 0.$$

Mentre

$$f(y^2, y) = \frac{y^4}{y^4 + y^4} = \frac{y^4}{2y^4} = \frac{1}{2},$$

Non esiste il $\lim_{(x,y)\to(0,0)}$ di

$$f(x,y) = \frac{x^2+y^2}{y} ???$$

$$y = mx \quad \frac{x^2(1+m^2)}{mx} \quad (x,y)\to(0,0)????$$

$$y = \alpha x^2 \quad \frac{x^2+\alpha^2x^4}{\alpha x^2} = \frac{x^2(1+\alpha^2x^2)}{\alpha x^2} = \frac{1}{\alpha}(1+\alpha^2x^2)$$

Continuità.

Sia $f : X \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in X$ di accumulazione per X

Le due proprietà seguenti sono equivalenti

(a) $\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0$ tale che se $x \in X$ e $\|x - x_0\| < \delta$, allora

$$|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

(b) $(x_n)\ \ x_n \in X$ e $x_n \to x_0$, allora $f(x_n) \to f(x_0)$.

$$\lim_{(x,y)\to(\pi,1)} \frac{\cos(xy)}{1 - y - \cos x} = ???$$

In due variabili $\mathbb{R}^2$:

$$l = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$$

Sia $X \subset \mathbb{R}^2$, $(x_0, y_0) \in X$ punto di accumulazione per X.
f continua in (x_0, y_0) se

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0, y_0)$$

$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall (x,y) \in X$ tale che $\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta$ risulta

$$|f(x,y) - f(x_0,y_0)| < \epsilon$$

Definizione della derivata di f in $\overline{x}$

$$f_{x_i}(\overline{x}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\overline{x}_1, \dots, \overline{x}_i + h, \dots, \overline{x}_n) - f(\overline{x}_1, \dots, \overline{x}_i, \dots, \overline{x}_n)}{h},$$

se tale limite esiste finito.

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} \quad f_{x_i} \quad D_{x_i} f$$

$$D_{x_i} \|x\|^2 = D_{x_i}(x_1^2 + x_2^2 + \dots x_n^2) = 2x_i$$

Definizione del gradiente di f.

$$Df(x) = (f_{x_1}(x), f_{x_2}(x), \dots, f_{x_n}(x))$$

Data una funzione f definita in un intorno di $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, f si dice derivabile parzialmente rispetto a x nel punto (x_0, y_0) se esiste ed è finito il limite

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}.$$

Il valore del limite si indica con $f_x(x_0, y_0)$ e si chiama derivata parziale prima rispetto a x della funzione in (x_0, y_0).
f si dice derivabile parzialmente rispetto a y nel punto (x_0, y_0) se esiste ed è finito il limite

$$\lim_{k \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k}.$$

Il valore del limite si indica con $f_y(x_0, y_0)$ e si chiama derivata parziale prima rispetto a y della funzione in (x_0, y_0).
f si dice derivabile parzialmente rispetto a x o rispetto a y in un aperto A se è derivabile parzialmente in ogni punto di A.

- $$f(x,y) = x + 7y \quad f_x = 1 \quad f_y = 7$$

- $$f(x,y) = xy \quad f_x = y \quad f_y = x$$

- $$f(x,y) = \frac{x}{y} \quad f_x = \frac{1}{y} \quad f_y = -\frac{x}{y^2}$$

- $$f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2} = (x^2+y^2)^{\frac{1}{2}} \quad f_x = \frac{1}{2}\frac{2x}{x^2+y^2} \quad f_y = \frac{1}{2}\frac{2y}{x^2+y^2}$$

- $$f(x,y) = \sin(xy) \quad f_x = y\cos(xy) \quad f_y = x\cos(xy)$$

$$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} \quad f_x = \frac{x}{x^2+y^2} \quad f_y = \frac{y}{x^2+y^2}$$

Ammette derivate parziali in ogni punto $\neq (0,0)$: non risulta derivabile in $(0,0)$. Infatti

$$\frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h} = \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \frac{|h|}{h}$$

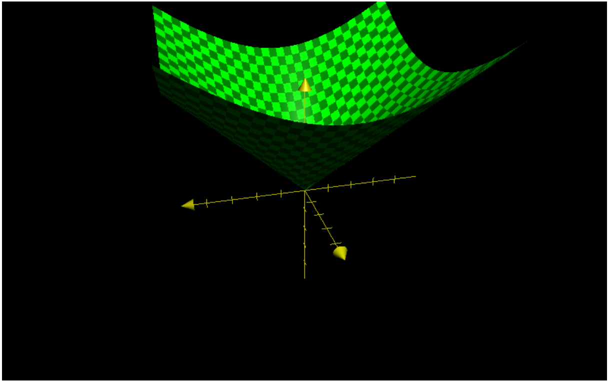

Figure: $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$

$$f(x,y) = |x-y|(x+y)$$

$$(1,1)$$

$$\frac{f(1+h,1)-f(1,1)}{h} = \frac{|h|}{h}(2+h)???$$

$$(0,0)$$

$$\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \frac{|h|\,h}{h} \to ???$$

Verifica del limite.

- Esercizio 1. Verificare

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

$$\left|\frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} - 0\right| \leq \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sqrt{x^2+y^2}$$

Per ogni numero reale $\epsilon > 0$ esiste un numero reale $\delta > 0$ tale che per ogni $x \in X$ $0 < \|x - x_0\| < \delta$ vale $|f(x) - l| < \epsilon$

$$\delta = \epsilon$$

Per ogni numero reale $\epsilon > 0$ $\delta = \epsilon$ tale che per ogni $x \in X$ con $0 < \|x - x_0\| < \delta$ vale $\left|\frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} - 0\right| < \epsilon$

- Esercizio 2. Verificare

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^3 + 5x^2 + 5y^2}{x^2 + y^2} = 5$$

$$\left|\frac{3x^3 + 5x^2 + 5y^2}{x^2 + y^2} - 5\right| = \left|\frac{3x^3 + 5x^2 + 5y^2 - 5x^2 - 5y^2}{x^2 + y^2}\right|$$

$$3\frac{|x^3|}{x^2 + y^2} = 3\frac{|x|x^2}{x^2 + y^2} \leq 3|x| = 3\sqrt{x^2} \leq 3\sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\delta = \frac{1}{3}\epsilon$$

- Esercizio. Non esiste il lim per $\lim_{(x,y)\to(0,0)}$ di

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$$

Consideriamo

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

La funzione non risulta continua in $(0,0)$

- la funzione ammette derivate parziali prime in $(0,0)$????
Ammette derivate parziali prime in $(0,0)$ e valgono 0.

Analisi Matematica una variabile: osserviamo il differente comportamento

Sia:

$$f(x, y) = xe^y + y^3x^2$$

Entrambe le derivate parziali prime sono continue. Risulta rispettivamente :

$$f_x = e^y + 2xy^3 \quad f_{xy} = e^y + 6xy^2$$
$$f_y = xe^y + 3y^2x^2 \quad f_{yx} = e^y + 6xy^2$$

Vediamo ora un esempio di funzione con derivate parziali miste diverse
Come vedremo, l'ipotesi di continuità delle derivate parziali seconde miste è sufficiente per la loro uguaglianza.. Un esempio di funzione con derivate seconde parziali miste differenti deve avere tali derivate non continue.

Data la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \ (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

- $f_x(0,0) = 0$:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = 0$$

- $f_y(0,0) = 0$:

$$\lim_{k\to 0} \frac{f(0,k) - f(0,0)}{k} = 0$$

$$f_x(x,y) = \begin{cases} y\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + xy\frac{2x(x^2+y^2)-2x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} & \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \ (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$f_y(x,y) = \begin{cases} -x\frac{y^2-x^2}{x^2+y^2} - xy\frac{2y(x^2+y^2)-2y(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2} & \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \ (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$f_x(x,y)=\begin{cases} y\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}+y\frac{4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} & \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\ (0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

$$f_y(x,y)=\begin{cases} -x\frac{y^2-x^2}{x^2+y^2}-x\frac{4y^2x^2}{(x^2+y^2)^2} & \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\ (0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Le derivate seconde miste in $(0,0)$ sono diverse, infatti:

$$f_{xy}(0,0)=\lim_{k\to 0}\frac{f_x(0,k)-f_x(0,0)}{k}=-1$$

$$f_{yx}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f_y(h,0)-f_y(0,0)}{h}=+1$$

$$f_{yx}(0,0)\neq\ f_{xy}(0,0).$$

Teorema di Schwarz.

$$f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

una funzione in due variabili, definita su un aperto A di $\mathbb{R}^2$. Se f ammette derivate seconde miste continue ($f \in C^2(A)$) allora vale in A

$$f_{xy} = f_{yx}$$

$$(x_0, y_0) \in A$$

Si scelgono due reali $\varepsilon\ \delta > 0$
$(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \times (y_0 - \delta, y_0 + \delta) \subset A$ (A aperto).
F e G

$$F\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$G\colon (-\delta, \delta) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

in modo che:

$$F(t) = f(x_0 + t, y_0 + s) - f(x_0 + t, y_0) \qquad \forall s \in (-\delta, \delta)$$

$$G(s) = f(x_0 + t, y_0 + s) - f(x_0, y_0 + s) \qquad \forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$$

$$F(t) - F(0) = G(s) - G(0).$$

Inoltre, applicando due volte il teorema di Lagrange:

$$F(t) - F(0) = tF'(\xi_1) = t\,[f_x(x_0 + \xi_1, y_0 + s) - f_x(x_0 + \xi_1, y_0)] =$$

$$ts\,[f_{xy}(x_0 + \xi_1, y_0 + \sigma_1)]$$

$$G(s) - G(0) = st\,[f_{yx}(x_0 + \xi_2, y_0 + \sigma_2)]$$

$\xi_i \in (0, t)$ e $\sigma_i \in (0, s)$
Il teorema segue facendo tendere t e s a 0 tenuto conto che le derivate seconde miste sono continue.

Matrice Hessiana

$$f \in C^2(\Omega)$$

$$Hf(x) = (f_{x_i x_j}(x))_{i,j=1,n}$$

$$Hf(x_0) = (f_{x_i x_j}(x_0))_{i,j=1,n}$$

Matrice Hessiana simmetrica: caso $n = 2$

$$f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}$$

Matrice Hessiana

$$f_x(x) = -2xe^{-(x^2+y^2)}$$

$$f_y(x) = -2ye^{-(x^2+y^2)}$$

Calcoliamo

$$f_{xx} = -2e^{-(x^2+y^2)} + 4x^2e^{-(x^2+y^2)}$$

$$f_{yy} = -2e^{-(x^2+y^2)} + 4y^2e^{-(x^2+y^2)}$$

$$f_{xy} = f_{yx} = 4xye^{-(x^2+y^2)}$$

Matrice Hessiana

$$\begin{pmatrix} -2e^{-(x^2+y^2)} + 4x^2e^{-(x^2+y^2)} & 4xye^{-(x^2+y^2)} \\ 4xye^{-(x^2+y^2)} & -2e^{-(x^2+y^2)} + 4y^2e^{-(x^2+y^2)} \end{pmatrix}$$

Calcolo in $(0,0)$

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Determinante $(= 4)$ primo elemento negativo $(= -2)$.
La funzione risulta ≤ 1 in $\mathbb{R}^2$ e vale 1 in $(0, 0)$.

Funzioni complesse. Funzioni derivabili in senso complesso. Condizioni di Cauchy-Riemann

Dato $z_0 \in \mathbb{C}$ e $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ se esiste finito il limite del rapporto incrementale (inteso come quoziente di numeri complessi)

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = f'(z_0)$$

dove il rapporto si può scrivere:

$$\frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \frac{u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0)}{\Delta x + i\Delta y} +$$

$$i\frac{v(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0)}{\Delta x + i\Delta y}$$

Assumiamo ora che la $f(z) = u(x,y) + iw(x,y)$ sia derivabile in $\mathbb{C}$.
Sia $z_0 \in \mathbb{C}$.
$(\Delta x, 0) \to (0,0) \qquad (0, \Delta y) \to (0,0)$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x_0 + \Delta x, y_0) - u(x_0, y_0)}{\Delta x} + i \frac{v(x_0 + \Delta x, y_0) - v(x_0, y_0)}{\Delta x} =$$

$$u_x(x_0, y_0) + i v_x(x_0, y_0)$$

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{u(x_0, y_0 + i\Delta y) - u(x_0, y_0)}{i\Delta y} + i \frac{v(x_0, y_0 + i\Delta y) - v(x_0, y_0)}{i\Delta y} =$$

$$\frac{u_y(x_0, y_0)}{i} + v_y(x_0, y_0)$$

Uguagliando i limiti, deduciamo le Condizioni di Cauchy- Riemann

$$\begin{cases} u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0) \\ u_y(x_0, y_0) = -v_x(x_0, y_0) \end{cases}$$

Vale il viceversa

Siano $u(x, y)$ e $v(x, y)$ due funzioni di classe C^1. Definiamo

$$f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y).$$

Se u ev soddisfano le condizioni di Cauchy Riemann allora f è derivabile.

Esempio di funzione olomorfa in $\mathbb{C}$: $f(z) = e^z$, $f(z) = \cos z$, $f(z) = \sin z$, $f(z) = z^n$

$$D(z^n) = nz^{n-1},\ n \in \mathbb{N},\ \ D(e^z) = e^z$$

$$D(\cos z) = -\sin z,\ \ D(\sin z) = \cos z$$

Verifica

$$e^z = u(x, y) + iv(x, y)$$

$$u(x, y) = e^x \cos y$$

$$v(x, y) = e^x \sin y$$

$$u_x = e^x \cos y = v_y$$

$$u_y = -e^x \sin y = -v_x$$

- La funzione $f(z) = \overline{z}$ risulta non olomorfa in $\mathbb{C}$. Infatti non sono verificate le condizioni di Cauchy-Riemann.
- Da
$$f'(z_0) = u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0),$$
ricavare la derivata complessa
$$D(e^z) = e^z$$