Esame scritto di Analisi Matematica II
Prof. Paola Loreti
23-03-2016

Nome, cognome e matricola: ______________________________

ESERCIZIO 1
Sia data

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & x \in (0, \pi/2) \\ -\frac{1}{2} & x \in (-\pi/2, 0) \\ 0 & \pi/2 \le |x| \le \pi \end{cases}$$

ripetuta per periodicità in $\mathbb{R}$. Determinare la serie di Fourier.

Soluzione: La funzione data è dispari. Pertanto, nello sviluppo in serie di Fourier, gli unici coefficienti non nulli saranno quelli di $\sin kx$. Avremo

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx)$$

dove

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx)\, dx$$

Per calcolare b_k, teniamo conto che, essendo $f(x)$ e $\sin kx$ funzioni dispari, il loro prodotto è una funzione pari. Quindi

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2} \sin(kx)\, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin(kx)\, dx$$

Calcolando l'integrale si ottiene

$$b_k = \frac{1}{\pi k}(1 - \cos(k\frac{\pi}{2})) = \begin{cases} \frac{1}{\pi k} & k = 1, 3, 5 \dots \\ \frac{1-(-1)^{k/2})}{k\pi} & k = 2, 4, 6 \dots \end{cases}$$

ESERCIZIO 2. Determinare gli eventuali punti stazionari della funzione definita in $\mathbb{R}^3$ da

$$f(x, y, z) = \frac{x^4}{4} + \frac{z^3}{3} + \frac{y^2}{2} + xyz$$

Soluzione:
I punti stazionari della funzione sono dati dal sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} f(x, y, z) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} f(x, y, z) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} f(x, y, z) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^3 + yz = 0 \\ y + xz = 0 \\ z^2 + xy = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^3 - xz^2 = 0 \\ y = -xz \\ z^2 - x^2 z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x(x^2 - z^2) = 0 \\ y = -xz \\ z(z - x^2) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 = z^2 \\ y = -xz \\ z^2(1-z) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 = 1 \\ y = -xz \\ z = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \\ z = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$$

I punti sono $(0,0,0)$, $(1,-1,1)$, $(-1,1,1)$.

ESERCIZIO 3 Calcolare l'integrale curvilineo

$$\int_\gamma (1 + \frac{9}{4}y)^{1/2} ds$$

dove γ è la curva di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x(t) = t^3 \\ y(t) = t^2 \end{cases} \qquad t \in [\tfrac{1}{3}, 2]$$

Soluzione:

$$\int_\gamma (1 + \frac{9}{4}y)^{1/2} ds$$

dove γ è la curva di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x(t) = t^3 \\ y(t) = t^2 \end{cases} \qquad t \in [\tfrac{1}{3}, 2]$$

Per definizione di integrale curvilineo, si ha

$$\begin{aligned} \int_\gamma (1 + \frac{9}{4}y)^{1/2} ds &= \int_{1/3}^{2} \big((1 + \frac{9}{4}t^2)(9t^4 + 4t^2)\big)^{1/2} dt \\ &= \int_{1/3}^{2} 2t(1 + \frac{9}{4}t^2)^{3/2} dt \\ &= 2\frac{4}{18} \int_{1/3}^{2} \frac{18}{4} t(1 + \frac{9}{4}t^2)^{3/2} dt \\ &= \frac{4}{9}\frac{2}{5}(1 + \frac{9}{4}t^2)^{5/2}|_{1/3}^{2} = \frac{8}{45}(1 + \frac{9}{4}t^2)^{5/2}|_{1/3}^{2} = \frac{8}{45}\big((10)^{5/2} - (\frac{5}{4})^{5/2}\big) = \\ \frac{2^3}{45}\frac{1}{2^5}\big(2^5(2)^{5/2}(5)^{5/2} - (5)^{5/2}\big) &= \frac{2^3}{45}\frac{1}{2^5}(5)^{5/2}(2^{15/2} - 1) = \frac{5}{36}\sqrt{5}(128\sqrt{2} - 1) \end{aligned}$$

ESERCIZIO 4. Se $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ è un campo di classe C^2. Calcolare

$$div(rot(F))$$

ove

$$rotF = (\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}, \frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x}, \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y})$$

$$div(rot(F)) = 0$$

ESERCIZIO 5. Sia T il triangolo di vertici $(0,0)$, $(-1,0)$, $(1,1)$. Calcolare

$$\int\int_T xy\, dxdy$$

Sia T il triangolo di vertici $(0,0)$, $(-1,0)$, $(1,1)$. Calcolare

$$\int\int_T xy\, dxdy$$

Soluzione:
Scriviamo T come dominio normale rispetto all'asse y:

$$T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1,\, 2y - 1 \leq x \leq y\}$$

Dunque

$$\int_T xy\, dxdy = \int_0^1 ydy \int_{2y-1}^{y} xdx \ = \frac{1}{2}\int_0^1 (-3y^3 + 4y^2 - y)dy = \frac{1}{2}(-\frac{3}{4} + \frac{4}{3} - \frac{1}{2}) = \frac{1}{24}$$