

Domanda 1

[2+2 punti]

- (i) Dare la definizione di limiti per successioni convergenti a zero.
Fornire due esempi.
- (ii) Calcolare l'equazione della retta tangente alla funzione $f(x) = \ln(e + x^2)$
nel punto $x_0 = 1$.

Risposta

- (i) _____

- (ii) _____

Esercizio 1

[3 punti]

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x^2)}{x^4}$$

vale

a) vale 0;

b) vale 1/2;

c) non esiste;

d) vale 1/4

Risoluzione (giustificare la risposta)

Esercizio 2

[5 punti]

Determinare $x \in \mathbb{R}$ non nullo tale che

$$\sum_{n=3}^{\infty} x^n = \frac{1}{2}x^2.$$

Risoluzione (giustificare la risposta)

Esercizio 3

[3+3 punti]

Sia

$$f(x) = 1 - \cos \pi x$$

Calcolare

- a) I punti in \mathbb{R} di massimo e il massimo assoluto b) I punti in \mathbb{R} di minimo e il minimo assoluto

Risoluzione (giustificare la risposta)

Esercizio 4

[4 punti]

Calcolare

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[e^{\left(\sum_{k=1}^n k\right)} - e^{(n^2+1)} \right]$$

Risoluzione

Esercizio 5

[4 punti]

Calcolare

$$\int_0^{\pi} |x^2 - 2x - 3| dx$$

Risoluzione

Esercizio 6

[5 punti]

Trovare le soluzioni in \mathbb{C} dell'equazione

$$27z^3 - 1 = 0.$$

Risoluzione

Esercizio 2

[3 punti]

Siano $\{a_n\}_n$ una successione di numeri reali positivi tale che $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ diverge, allora $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{a_n^2}$

- | | | | |
|----------------------------|----------|----------------------------|-----------------------|
| <input type="checkbox"/> a | diverge | <input type="checkbox"/> b | é oscillante |
| <input type="checkbox"/> c | converge | <input type="checkbox"/> d | non si può dire nulla |

Risoluzione (giustificare la risposta)

Domanda 2

[4 punti]

Sia $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione decrescente. Allora

- a è inferiormente e superiormente non limitata b è superiormente limitata
 c è inferiormente non limitata d converge o diverge negativamente

Risoluzione (giustificare la risposta)

Domanda 1

[2+2 punti]

- (i) Dare la definizione di derivata parziale $\frac{\partial f}{\partial x}$ per una funzione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$
(ii) Enunciare il teorema di Rolle (senza dimostrazione).

Risposta

(i) _____

(ii) _____

Domanda 2

[4+2 punti]

(i) Dimostrare, per $x \geq 0$ che

$$(2+x)^n \geq 2^{n-1}(2+nx) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

(ii) Calcolare

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n (2 + e^{-k}) \quad n \in \mathbb{N}$$

Risoluzione

(i) _____

(ii) _____

Esercizio 1

[4 punti]

Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x \sin^3(t) dt}{\sin^3(x)}$$

Risoluzione (giustificare la risposta)

Esercizio 2

[3 punti]

Data la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$$

allora

a) diverge positivamente

b) é indeterminata

c) converge

d) non si può dire nulla

Risoluzione (giustificare la risposta)

Esercizio 3

[3 punti]

Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione derivabile due volte. Se esiste $c \in (a, b)$ con $f'(c) = 0$ e $f''(c) = 0$, allora

a $f(a) = f(b)$

b f non é iniettiva

c f ha un flesso in c

d nessuna delle precedenti

Risoluzione (giustificare la risposta)

Esercizio 4

[2 punti]

Calcolare il massimo assoluto della funzione

$$f(x) = \ln x - x \quad x \in \left[\frac{1}{2}, 2 \right]$$

Risoluzione

Esercizio 5

[3+3 punti]

(i) Calcolare

$$\int \frac{x+5}{x^2+10x+100} dx$$

(ii)

$$\int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{\sin x}{1-\sin^2 x} dx$$

Risoluzione

(i) _____

(ii) _____

Esercizio 6

[3 punti]

Trovare le soluzioni nel campo complesso dell'equazione

$$|z|^2 + z = 0.$$

Risoluzione

Esercizio 1

[4 punti]

Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x \sin^3(t) dt}{\sin^3(x)}$$

Esercizio 2

[3 punti]

Data la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$$

allora

a) diverge positivamente

b) é indeterminata

c) converge

d) non si può dire nulla

Risoluzione (giustificare la risposta)

Esercizio 3

[3 punti]

Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione derivabile due volte. Se esiste $c \in (a, b)$ con $f'(c) = 0$ e $f''(c) = 0$, allora

a) $f(a) = f(b)$

b) f non é iniettiva

c) f ha un flesso in c

d) nessuna delle precedenti

Risoluzione (giustificare la risposta)

Esercizio 4

[2 punti]

Calcolare il massimo assoluto della funzione

$$f(x) = \ln x - x \quad x \in \left[\frac{1}{2}, 2 \right]$$

Risoluzione

Esercizio 5

[3+3 punti]

(i) Calcolare

$$\int \frac{x+5}{x^2+10x+100} dx$$

(ii)

$$\int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{\sin x}{1 - \sin^2 x} dx$$

Risoluzione

Esercizio 6

[3 punti]

Trovare le soluzioni nel campo complesso dell'equazione

$$|z|^2 + z = 0.$$

Domanda 1 [4 punti]

Dimostrare mediante il principio di induzione

$$n^2(n-1)! \geq 2^{n-1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Risposta

(i) _____

Domanda 2

[3 punti]

Fornire un esempio di successione per cui

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = e^3$$

Risposta

(i) _____

Esercizio 1

[3 + 2 punti]

Data la funzione

$$f(x) = \ln |x^2 - \sqrt{32}x + 8|,$$

determinare

- (i) insieme di definizione ed eventuali asintoti verticali,
- (ii) la derivata prima.

Risoluzione (giustificare la risposta)

(i) _____

(ii) _____

Esercizio 2

[2 +2+2 punti]

In $[-1, +\infty)$ sia data la funzione

$$f(x) = \int_{-1}^x te^{-t^2} dt,$$

determinare

(i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

(ii) la derivata prima,

(iii) In $[-1, +\infty)$ eventuali punti di minimo e massimo relativi.

Risoluzione (giustificare la risposta)

(i) _____

(ii) _____

(iii) _____

Esercizio 3

[3 punti]

Risolvere l'equazione differenziale $y''(x) = x$

Risoluzione (giustificare la risposta)

Esercizio 4

[6 punti]

Calcolare

$$\int_{\frac{4\pi}{3}}^{\frac{5\pi}{3}} |\sin x| \cos \frac{x}{2} dx$$

Risoluzione

Esercizio 4

[4 punti]

Calcolare

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^{3k}$$

Risoluzione (giustificare la risposta)
