3 - Data la funzione

$$f(x,y) = x^2 - y^2$$

(a) calcolare la derivata direzionale di f nel punto $(1,2)$ lungo la direzione individuata dal versore $v = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$.
(b) Determinare il minimo e il massimo assoluti di f nella regione D delimitata dal trapezio di vertici $(1,2)$, $(-1,2)$, $(1/4, 1/2)$ e $(-1/4, 1/2)$, compresi i lati del trapezio.

....

(a) La funzione f è di classe C^1 in $\mathbf{R}^2$, e quindi è differenziabile in ogni punto del piano.
$f_x(x,y) = 2x$, $f_y(x,y) = -2y$;
$f_x(1,2) = 2$, $f_y(1,2) = -4$, $\dfrac{\partial f}{\partial v}(1,2) = 2 \cdot \dfrac{1}{\sqrt{2}} - 4 \cdot \dfrac{1}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}$.
(b) Si osservi che $\nabla f(x,y) = (0,0)$ se e solo se $x = y = 0$ e $(0,0) \notin D$. Pertanto occorre studiare la funzione sui lati del trapezio:
$f(x, 1/2) = x^2 - 1/4, \quad -1/4 \le x \le 1/4,$
$f(x, 2x) = -3x^2, \quad 1/4 \le x \le 1,$
$f(x, 2) = x^2 - 4, \quad -1 \le x \le 1,$
$f(x, -2x) = -3x^2, \quad -1 \le x \le -1/4,$
e di conseguenza il minimo e il massimo sono necessariamente tra i seguenti valori

$$f(0,1/2) = -1/4, \quad f(0,2) = -4, \quad f(1,2) = f(-1,2) = -3, \quad f(1/4,1/2) = f(-1/4,1/2) = -\frac{3}{16}.$$

In conclusione, $\min\limits_D f = -4$ e $\max\limits_D f = -\dfrac{3}{16}$.

---

6 - Data la funzione $f(x,y) = x - y$ determinare massimi e minimi nell'insieme $A = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : -1 \le x \le 1,\ -2 \le y \le 2\}$.

....

La funzione f è continua in A, insieme chiuso e limitato di $\mathbf{R}^2$, e quindi per il teorema di Weierstrass f ha minimo assoluto e massimo assoluto in A.
La funzione f non ha punti stazionari. Dallo studio di f sui lati del rettangolo segue che il massimo assoluto è $f(1,-2) = 3$ e il minimo assoluto è $f(-1,2) = -3$.

---

6 - Data la funzione $f(x,y) = x^2 - y^2 + 2xy$ determinare massimi e minimi nell'insieme $A = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 \le 1\}$.

....

La funzione f è continua in A, insieme chiuso e limitato di $\mathbf{R}^2$, e quindi per il teorema di Weierstrass f ha minimo assoluto e massimo assoluto in A.
Poiché $\nabla f(x,y) = (2x + 2y, -2y + 2x)$, l'unico punto stazionario di f è $(0,0)$. Studiando la funzione di f sulla circonferenza di centro $(0,0)$ e raggio 1 si ha

$$g(\theta) := f(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta) = \cos(2\theta) + \operatorname{sen}(2\theta), \quad \theta \in [0, 2\pi],$$

$$g'(\theta) = -2\operatorname{sen}(2\theta) + 2\cos(2\theta) = 0 \qquad \text{se e solo se} \quad \operatorname{tg}(2\theta) = 1, \quad \theta = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}, \quad k = 0,1,2,3.$$

In conclusione, il massimo assoluto è $f\left(\cos\dfrac{\pi}{8}, \operatorname{sen}\dfrac{\pi}{8}\right) = f\left(\cos\dfrac{9\pi}{8}, \operatorname{sen}\dfrac{9\pi}{8}\right) = \sqrt{2}$, mentre il minimo assoluto è $f\left(\cos\dfrac{5\pi}{8}, \operatorname{sen}\dfrac{5\pi}{8}\right) = f\left(\cos\dfrac{13\pi}{8}, \operatorname{sen}\dfrac{13\pi}{8}\right) = -\sqrt{2}$.