Analisi Matematica II Elettronica Comunicazioni I parte

Docente Prof.ssa Paola Loreti

Consideriamo serie geometrica di ragione $x \in \mathbb{R}$

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$$

Ridotta n-sima

$$s_n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1}$$

.
Se $x = 1$ si ha

$$s_n = 1 + 1 + \cdots + 1 = n.$$

Sia $x \neq 1$. Si ha

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} = \frac{1 - x^n}{1 - x}$$

Se $|x| < 1$ allora $\lim_{n\to\infty} x^n = 0$ e pertanto

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - x^n}{1 - x} = \frac{1}{1 - x}.$$

Se $x > 1$, poichè $\lim_{n\to\infty} x^n = +\infty$ si ha

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{x^n - 1}{x - 1} = \frac{1}{x - 1} \cdot \lim_{n\to\infty} x^n - \frac{1}{x - 1} = +\infty$$

Sia ora $x = -1$,

$$s_n = \frac{1-(-1)^n}{2} = \begin{cases} 0 & , \quad n = 2p \\ 1 & , \quad n = 2p+1 \end{cases}$$

Pertanto la successione $(s_n)_{\mathbb{N}}$ non è regolare.
Sia infine $x < -1$. Possiamo scrivere $x = -|x|$, e quindi

$$\begin{aligned} s_n &= \frac{1-(-|x|)^n}{1+|x|} = \frac{1-(-1)^n|x|^n}{1+|x|} \\ &= \begin{cases} \dfrac{1-|x|^{2p}}{1+|x|}, & n = 2p \\ \dfrac{1+|x|^{2p-1}}{1+|x|}, & n = 2p-1 \end{cases} \end{aligned}$$

Ne segue che $S_{2p} \to -\infty$ e $S_{2p-1} \to +\infty$ e pertanto $\nexists \lim_{n\to\infty} s_n$
Allora

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \lim_{n\to\infty} s_n = \begin{cases} +\infty & x \geq 1 \\ \dfrac{1}{1-x} & x \in (-1,1) \\ \nexists & x \leq -1 \end{cases}$$

La Serie geometrica costituisce un caso particolare di serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$$

quando $a_n = 1 \quad n = 0, 1, \ldots\ldots \quad$ e $x_0 = 0$.
In generale i coefficienti a_n costituiscono una successione di numeri reali.
Con una traslazione $y = x - x_0$ possiamo ricondurci al caso $x_0 = 0$
Infatti supponiamo di dover studiare l'insieme di convergenza della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty}(x - 1)^n$$

Si pone $y = x - 1$ e si studia

$$\sum_{n=0}^{\infty} y^n,$$

che sappiamo essere convergente per $|y| < 1$.

Concentriamo la nostra analisi sul ruolo dei coefficienti a_n.
Osserviamo di aver incontrato le serie di potenze con nello studio delle serie numeriche (oltre le serie geometriche). Facciamo alcuni esempi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n.$$

Per il criterio del rapporto per le serie numeriche la serie converge (assolutamente) per $|x| < 1$. Il caso $|x| = 1$ deve essere studiato separatamente per $x = 1$ la serie diverge (serie armonica), per $x = -1$ la serie converge (Criterio di Leibniz) pertanto l'insieme dove la serie converge dato da $(-1, 1) \cup \{-1\}$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} x^n.$$

Per il criterio del rapporto per le serie numeriche la serie converge (assolutamente) per $|x| < 1$. $|x| = 1$ deve essere studiato separatamente per $x = 1$ la serie converge, per $x = -1$ la serie converge (Criterio di Leibniz) pertanto l'insieme dove la serie converge dato da $(-1, 1) \cup \{-1, 1\}$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n.$$

Per il criterio del rapporto per le serie numeriche la serie converge (assolutamente) per ogni x reale.

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n.$$

Per il criterio del rapporto per le serie numeriche la serie converge solo per $x = 0$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} 3^n x^n.$$

Per il criterio del rapporto per le serie numeriche la serie converge (assolutamente) per $|x| < \frac{1}{3}$. $|x| = \frac{1}{3}$ deve essere studiato separatamente per $x = \frac{1}{3}$ la serie diverge, per $x = -\frac{1}{3}$ la serie risulta indeterminata.

Vediamo negli esempi che l'insieme di convergenza risulta un intervallo, l'analisi nei punti di estremo dell'intervallo varia da caso a caso. Sia $x_0 \in \mathbb{R}$.

$$S : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

la serie di potenze

$$S(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k (x - x_0)^k$$

E l'insieme di convergenza puntuale della serie, ossia
$E := \{x \in \mathbb{R} : S(x) \, \mathit{converge} \;\}$

$$E \neq \emptyset$$

$$r := \sup\{|x - x_0| : \;\; x \in E\},$$

In caso di serie centrata nell'origine, l E l'insieme dei punti x in cui la serie converge e

$$r = \sup E$$

Dimostriamo ora che l'intuizione maturata sulla struttura dell'insieme di convergenza corrisponde a un risultato matematico.
Proposizione. Se la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

converge in un punto x_1 allora converge (assolutamente) in ogni punto x tale che $|x| < |x_1|$.

Dimostrazione

Sappiamo che la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_1^n$ converge. Assumiamo $x_1 \neq 0$. Dalla condizione necessaria di convergenza

$$\lim_{n\to+\infty} a_n x_1^n = 0,$$

ne segue che esiste $N \in \mathbb{N}$ tale che per $n > N$

$$|a_n x_1^n| < 1.$$

Allora per $n > N$

$$|a_n x^n| = |a_n x_1^n| \left| \frac{x^n}{x_1^n} \right| = |a_n x_1^n| \left| \frac{x}{x_1} \right|^n$$

Quindi tenuto conto che $|a_n x_1^n| < 1$

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n x^n| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \left| \frac{x}{x_1} \right|^n$$

L'ultima serie converge se $|x| < |x_1|$.

Criterio di Cauchy
Se esiste il limite (anche $+\infty$)

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = l,$$

allora

$$r = \frac{1}{l}$$

Criterio di D'Alembert
Sia $a_n \neq 0$, per ogni n. Se esiste il limite (anche $+\infty$)

$$\lim_{n \to +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = l,$$

allora

$$r = \frac{1}{l}.$$

Se $l = +\infty$ allora $r = 0$, se $l = 0$ allora $r = +\infty$

Calcolare il raggio di convergenza della serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} n\left(\frac{x}{3}\right)^n.$$

Risulta

$$\sum_{n=0}^{\infty} n\left(\frac{x}{3}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} n\left(\frac{1}{3}\right)^n x^n$$

Calcoliamo

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(n+1)\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{n\left(\frac{1}{3}\right)^n} = \frac{1}{3}(1+\frac{1}{n}).$$

Ne segue $l = \frac{1}{3}$ e $r = 3$

Ricapitolando: data la serie di potenze, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ determiniamo il raggio di convergenza r (i criteri non fanno intervenire x). Allora la serie converge assolutamente per $|x| < r$, non converge per $|x| > r$, in generale non possiamo dire nulla per $|x| = r$.
Ricapitolando
Data la serie di potenze si verifica sempre uno dei seguenti casi

- la serie converge per $x = 0$
- la serie converge per ogni x reale
- la serie converge per $|x| < r$ e non converge per $|x| > r$

Osserviamo che questa definizione risulta estendibile al caso complesso. Sia $z \in \mathbb{C}$. Ripartendo dalla serie geometrica e ricordando che

$$|z| = \sqrt{(\Re z)^2 + (\Im z)^2}$$

il modulo di z. Abbiamo che la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

converge se $|z| < 1$. Nel piano complesso $(\Re z, \Im z)$ l'insieme $\sqrt{(\Re z)^2 + (\Im z)^2} < 1$ individua il cerchio di centro 0 e raggio 1 privato della circonferenza. Il raggio di convergenza (in questo caso si ha perfetta corrispondenza con l'immagine grafica) risulta 1.

Serie di Potenze ed equazione di Bessel di ordine zero Illustriamo il Metodo di Frobenius per illustrare come determinare la soluzione dell'equazione di Bessel di ordine 0.

$$xy''(x) + y'(x) + xy(x) = 0, \qquad x > 0$$

Ricordiamo le equazioni di Bessel di ordine n

$$x^2y''(x) + xy'(x) + (x^2 - n^2)y(x) = 0, \qquad x > 0$$

Aggiungiamo la condizione in $x = 0$, $y(0) = 1$,

$$y'(x) = -xy''(x) - xy(x), \qquad y'(0) = 0$$

Ricapitolando vogliamo risolvere

$$\begin{cases} xy''(x) + y'(x) + xy(x) = 0, & x > 0, \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 \end{cases}$$

Assumiamo che la soluzione sia esprimibile in serie di potenze

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Dalla condizione $y(0) = 1$ si ricava $a_0 = 1$. Dunque

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 1 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + \cdots =$$

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = 1 + \sum_{m=0}^{\infty} a_{m+1} x^{m+1}$$

Calcoliamo i singoli termini

$$xy(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1}$$

$$y'(x) = a_1 + \sum_{n=0}^{\infty} (n+2) a_{n+2} x^{n+1}$$

$$y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n \qquad xy''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^{n+1}$$

Sostituendo

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^{n+1}+a_1+\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)a_{n+2}x^{n+1}+\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+1}=0$$

Riordinando

$$a_1+\sum_{n=0}^{\infty}\left(a_n+(n+2)^2a_{n+2}\right)x^{n+1}=0.$$

Ricaviamo $a_0 = 1, \quad a_1 = 0.$

$$a_n + (n+2)^2 a_{n+2} = 0 \qquad a_{n+2} = -\frac{1}{(n+2)^2} a_n$$

Per n dispari $a_n = 0$, per n pari allora $n = 2k \;\; k \in \mathbb{N}$

$$a_{2(k+1)} = -\frac{1}{2^2(k+1)^2} a_{2k}$$

$$a_2 = -\frac{1}{2^2} a_0 = -\frac{1}{2^2}$$

$$a_4 = -\frac{1}{2^2}\frac{1}{2^2} a_2 = \frac{1}{2^2}\frac{1}{2^2}\frac{1}{2^2} = \frac{1}{2^2}\frac{1}{2^4}$$

$$a_6 = -\frac{1}{2^2}\frac{1}{3^2} a_4 = -\frac{1}{2^2}\frac{1}{3^2}\frac{1}{2^2}\frac{1}{2^4} = -\frac{1}{2^6}\frac{1}{(3!)^2}$$

$$\cdots$$

$$\cdots$$

$$\cdots$$

$$\begin{cases} a_{2n+1} = 0, \\ a_{2n} = (-1)^n \frac{1}{2^{2n}} \frac{1}{(n!)^2}, \end{cases}$$

Otteniamo

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2^{2n}} \frac{1}{(n!)^2} x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(n!)^2} \frac{x^{2n}}{2^{2n}} =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(n!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}$$

funzione di Bessel di ordine 0.

Derivazione termine a termine.
Teorema. Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ una serie di potenze con raggio di convergenza $r > 0$ e con somma

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad |x| < r.$$

La serie derivata

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

ha lo stesso raggio di convergenza della serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ la somma $f(x)$ risulta derivabile e vale

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \qquad |x| < r.$$

Vediamo un'applicazione del risultato.

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \qquad |x| < 1$$

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n \qquad |x| < 1$$

$$\frac{1}{(1+x)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} n x^{n-1} \qquad |x| < 1$$

Integrazione termine a termine.
Teorema. Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ una serie di potenze con raggio di convergenza $r > 0$ e con somma

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad |x| < r.$$

Si ha

$$\int_0^x f(s)ds = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} \qquad |x| < r$$

Utilizziamo questo risultato.

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n} \qquad |x| < 1,$$

Integrando

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} x^{2n+1} \qquad |x| < 1$$

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n \qquad |x| < 1$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n \quad \text{per } |x| < 1$$

Possiamo utilizzare il risultato per integrare per serie alcune funzioni non integrabili elementarmente. Per $a > 0$ calcoliamo

$$\int_0^a \frac{\sin x}{x} d\,x = \int_0^a \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!(2n+1)} x^{2n} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1}$$

Introduciamo la funzione degli errori introdotta da Gauss

$$\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n!} t^{2n} dx =$$

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n!(2n+1)} x^{2n+1}.$$

Serie di Taylor. Data una funzione $f \in C^{\infty}(x_0 - r, x_0 + r)$ la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^n(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

si dice serie di Taylor di f relativa al punto x_0.
Se vale

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^n(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \qquad |x - x_0| < r,$$

la funzione f si dice sviluppabile in serie di Taylor per x: $\quad |x - x_0| < r$.

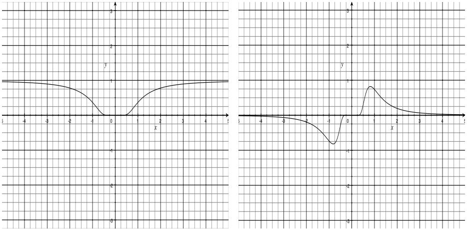
Il seguente esempio mostra che che esistono funzioni
$f \in C^\infty(-r, r)$ che non sono uguali alla serie di Taylor.
Esempio

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

La funzione presenta derivate tutte nulle in $x_0 = 0$ Per $x \neq 0$

$$De^{-\frac{1}{x^2}} = \big(D\big(-\frac{1}{x^2}\big)\big)e^{-\frac{1}{x^2}} = \frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}}$$

....
quindi la serie di Taylor ad essa relativa vale 0 e non coincide con la funzione.

- 

- la somma di due funzioni pari: pari ?
- la somma di due funzioni dispari: dispari?
- il prodotto di due funzioni pari: pari?
- il prodotto di due funzioni dispari: pari?
- il prodotto di una funzione pari e di una funzione dispari: dispari?
- la derivata di una funzione pari: dispari ?
- la derivata di una funzione dispari: pari?

Ricordiamo

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots \qquad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \qquad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}$$

- La serie di Taylor di una funzione pari contiene solo potenze pari.
- La serie di Taylor di una funzione dispari contiene solo potenze dispari.

f dispari $0 \in \mathrm{dom} f$ allora $f(0) = 0$

La formula di Eulero: per ogni numero reale x vale

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

Per $z \in \mathbb{C}$

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \cdots$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \cdots$$

Sostituendo z con ix si ottiene, riordinando la serie (giustificato per la convergenza assoluta):

$$e^{ix} = 1 + ix + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \frac{(ix)^5}{5!} + \frac{(ix)^6}{6!} + \frac{(ix)^7}{7!} + \frac{(ix)^8}{8!} + \cdots$$

$$= 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - \frac{ix^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{ix^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} - \frac{ix^7}{7!} + \frac{x^8}{8!} + \cdots =$$

$$= \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + \cdots\right) + i\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots\right)$$

$$= \cos(x) + i\sin(x)$$

Ci occupiamo di condizioni di sviluppabilità di una funzione in serie di Taylor.

Definizione. Sia f derivabile $n+1$ volte, il resto dato dalla formula di Taylor è definito come

$$r(x_0, n, x) = r_n(x_0, x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^k(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

Sappiamo (resto di Peano) che

$$r(x_0, n, x) = o((x - x_0)^n) \qquad x \to x_0.$$

Ci occupiamo di condizioni per cui

$$r(x_0, n, x) \to 0 \qquad n \to +\infty$$

Resto Integrale e di Lagrange.
Deduciamo ora altre espressioni del resto
Teorema. Se f è derivabile $n+1$ volte, il resto si pu ò esprimere

$$r_n(x_0, x) = \int_{x_0}^{x} \frac{f^{n+1}(t)}{n!}(x-t)^n dt$$

La dimostrazione del risultato segue il principio di induzione. Per $n = 0$ il risultato segue da

$$f(x) - f(x_0) = \int_{x_0}^{x} f'(t)dt.$$

Assumiamo vera l'affermazione al passo $n-1$. Il resto al passo $n-1$ si esprime

$$r_{n-1}(x_0, x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^k(x_0)}{k!}(x-x_0)^k.$$

Si ha

$$r_{n-1}(x_0, x) = \int_{x_0}^{x} \frac{f^n(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1} dt = \int_{x_0}^{x} \frac{f^n(t)}{(n-1)!}\left[-\frac{(x-t)^n}{n}\right]' dt =$$

$$-\left[\frac{(x-t)^n}{n!} f^n(t)\right]_{x_0}^{x} + \int_{x_0}^{x} f^{n+1}(t)\frac{(x-t)^n}{n!} dt$$

$$= \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^n(x_0) + \int_{x_0}^{x} f^{n+1}(t)\frac{(x-t)^n}{n!} dt$$

In conclusione

$$r(x_0, n-1, x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^k(x_0)}{k!}(x-x_0)^k =$$

$$\frac{(x-x_0)^n}{n!} f^n(x_0) + \int_{x_0}^{x} f^{n+1}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}dt,$$

e quindi

$$r_n(x_0, x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^k(x_0)}{k!}(x-x_0)^k =$$

$$f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^k(x_0)}{k!}(x-x_0)^k - \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^n(x_0) =$$

$$\int_{x_0}^{x} f^{n+1}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}dt.$$

Dalla formula del resto integrale si deduce la formula del resto di Lagrange. Teorema. Se f è derivabile $n+1$ volte in un intervallo I e x, x_0 sono punti di I, esiste un punto ξ compreso tra x e x_0 tale che

$$r_n(x_0, x) = f^{n+1}(\xi)\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!},$$

Dimostrazione.

$$r_n(x_0, x) = \int_{x_0}^{x} f^{n+1}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}dt =$$

Assumiamo $x > x_0$. In $[x_0, x]$ applichiamo il teorema della media integrale

$$m \leq f^{n+1}(t) \leq M,$$

essendo

$$m = \min_{[x_0,x]} f^{n+1}(t) \qquad M = \max_{[x_0,x]} f^{n+1}(t).$$

Abbiamo

$$m\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} \leq \int_{x_0}^{x} f^{n+1}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}dt \leq M\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$$

Ossia

$$m \leq \left[\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}\right]^{-1} \int_{x_0}^{x} f^{n+1}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}dt \leq M$$

Dal teorema dei valori intermedi applicato a f^{n+1}, si ha che esiste ξ per cui

$$f^{n+1}(\xi) = \left[\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}\right]^{-1} \int_{x_0}^{x} f^{n+1}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}dt,$$

da cui la tesi.

Se la funzione f è derivabile infinite volte in un intervallo (a, b) e se esistono due numeri reali L e M tali che

$$|f^{(n)}(x)| \leq ML^n \qquad \forall x \in (a, b) \quad \forall n,$$

allora per ogni $x_0 \in (a, b)$ la funzione è sviluppabile in serie di Taylor centrata in x_0.
Esempio.

$$f(x) = \sin x \quad f(x) = \cos x$$

$$|f^{(n)}(x)| \leq 1 \qquad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall n$$

Esercizi.

- il raggio di convergenza risulta un numero reale strettamente positivo.
  vero falso
- Determinare il raggio di convergenza della serie
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n^2+1)3^n}$$
- Determinare l'insieme di convergenza della serie
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x-1)^n}{3^n}$$
- Data la serie di funzioni
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-x^2)^n}{\sqrt{n}}$$
  l'insieme di convergenza risulta un intervallo?

Se $\alpha \in \mathbb{R}$ e $|x| < 1$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{j=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{j} x^j$$

ove

$$\binom{\alpha}{j} = \begin{cases} 1 & j = 0 \\ \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-j+1)}{j!} & j \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Osserviamo $f^j(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-j+1)(1+x)^{\alpha-j}$

$$f^j(0) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-j+1)$$

$$\alpha = \frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} 1 & j = 0 \\ \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-j+1)}{j!} & j \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Osserviamo

$$\binom{\frac{1}{2}}{j} = (-1)^{j-1} \frac{\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{3}{2}\cdots\frac{2j-3}{2}}{j!} = (-1)^{j-1} \frac{1 \cdot 3 \cdot \ldots (2j-3)}{2^j j!} =$$

$$(-1)^{j-1} \frac{1 \cdot 3 \cdot \ldots (2j-3)}{(2j)(2(j-1))(2(j-2))\ldots 2}$$

$$= (-1)^{j-1} \frac{1 \cdot 3 \cdot \ldots (2j-3)}{(2j)!!} = (-1)^{j-1} \frac{(2j-3)!!}{(2j)!!}$$

ove $n!!$ indica
se n dispari il prodotto di tutti i dispari tra 1 e n,
se n pari il prodotto di tutti i pari tra 2 e n.

$$\binom{\alpha}{j} = \prod_{k=1}^{j} \frac{\alpha - k + 1}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-j+1)}{j!}$$

$$\binom{\frac{1}{2}}{2} = ?$$

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x + \sum_{j=2}^{+\infty} \binom{\frac{1}{2}}{j} x^j =$$

$$1 + \frac{1}{2}x + \sum_{j=2}^{+\infty} (-1)^{j-1} \frac{(2j-3)!!}{(2j)!!} x^j \qquad |x| < 1$$

$$(1+x)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \sum_{j=1}^{+\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{j} x^j =$$

$$1 + \sum_{j=1}^{+\infty} (-1)^j \frac{(2j-1)!!}{(2j)!!} x^j \qquad |x| < 1$$

sostituiamo $-x^2$ al posto di x

$$(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{(2j-1)!!}{(2j)!!} x^{2j} \qquad |x| < 1$$

Integrando per serie

$$\arcsin x = x + \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{(2j-1)!!}{(2j)!!(2j+1)} x^{2j+1} \quad |x| < 1$$

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} x^{2n+1} \qquad |x| < 1$$

$$x = 1 \quad \frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n \qquad \text{per } \ |x| < 1$$

$$x = 1 \quad \ln(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

Le formula di Eulero: per $x \in \mathbb{R}$, i unità immaginaria.

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

Per $z \in \mathbb{C}$ definiamo

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

$$\cos hz = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2}$$

$$\sin hz = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2}$$

Le formula di Eulero: per $x \in \mathbb{R}$, i unità immaginaria.

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

Ricordiamo la
Formula di triplicazione

$$\cos 3x + i \sin 3x = (e^{ix})^3 = (\cos x + i \sin x)^3 =$$

$$= \cos^3 x - i \sin^3 x + 3i \cos^2 x \sin x - 3 \sin^2 x \cos x.$$

Uguagliando la parte reale e la parte immaginaria dei due numeri

$$\cos(3x) = \cos^3 x - 3 \sin^2 x \cos x$$

$$\sin(3x) = -\sin^3 x + 3 \cos^2 x \sin x$$

La formula del Binomio e la Formula di Eulero.
Più in generale si ha
Si ha

$$\cos(nx) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos\frac{(n-k)\pi}{2} \cos^k x \sin^{n-k} x, \qquad n \in \mathbb{N}$$

Ricordiamo

$$\cos(nx) = \left(\frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2}\right) = \left(\frac{(e^{ix})^n + (e^{-ix})^n}{2}\right)$$

Proof.

$$\cos(nx) = \frac{(\cos x + i\sin x)^n + (\cos x - i\sin x)^n}{2} =$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{\cos^k x (i\sin x)^{n-k} + \cos^k x(-i\sin x)^{n-k}}{2} =$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(i)^{n-k} + (-i)^{n-k}}{2} \cos^k x \sin^{n-k} x =$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(e^{\frac{i\pi}{2}})^{n-k} + (e^{\frac{-i\pi}{2}})^{n-k}}{2} \cos^k x \sin^{n-k} x =$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(e^{\frac{i(n-k)\pi}{2}}) + (e^{\frac{-i(n-k)\pi}{2}})}{2} \cos^k x \sin^{n-k} x =$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos\frac{(n-k)\pi}{2} \cos^k x \sin^{n-k} x$$

Esercizio. Dalla formula di Eulero, $x \in \mathbb{R}$, i unità immaginaria.

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i},$$

ricavare

$$\sin(nx) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin \frac{(n-k)\pi}{2} \cos^k x \sin^{n-k} x, \qquad n \in \mathbb{N}$$

Esponenziale complesso

Abbiamo definito l'esponenziale complesso

$$e^z = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!}$$

La scrittura permette di trattare agevolmente l'esponenziale complesso nella forma

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y),$$

In questo modo

$$e^z = u(x, y) + iv(x, y),$$

con

$$u(x, y) = e^x \cos y \qquad v(x, y) = e^x \sin y$$

$$|e^z| = e^x$$

Vale per $z, w \in \mathbb{C}$

$$e^{z+w} = e^z e^w$$

- Vale inoltre

$$e^{-iy} = \overline{e^{iy}}$$

La funzione esponenziale ha nel piano complesso risulta periodica di periodo $2\pi i$.

$$e^z = e^{x+iy} = e^{x+i(y+2\pi)} = e^{z+2\pi i}$$

Logaritmo complesso. Possiamo dare la definizione di logaritmo di un numero complesso $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$. Sia $z \neq 0$. $\ln z$ sono quei numeri $\omega = x + iy$ tali $e^\omega = z$.
Si ricava

$$e^x(\cos y + i\sin y) = r(\cos\theta + i\sin\theta) \iff x = \ln r \quad y = \theta + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Pertanto ogni numero complesso non nullo ha infiniti logaritmi

$$\ln z = \ln|z| + i(\arg z + 2k\pi)$$
$$\ln i = \ln|i| + i(\frac{\pi}{2} + 2k\pi) = i(\frac{\pi}{2} + 2k\pi)$$

Logaritmo principale

$$\arg z \in (-\pi, \pi], \quad k = 0$$

Possiamo ora definire z^α con α reale o complesso.

$$z^\alpha = e^{\alpha \ln z}$$

esempio:

$$i^i = e^{i\ln i} = e^{i(i(\arg i + 2k\pi))} = e^{-\frac{\pi}{2} - 2k\pi}$$

Tutti i valori sono numeri reali.