FOGLIO DI ESERCIZI: I NUMERI REALI

1. Foglio di esercizi: i numeri reali

Si indica con $\mathbb{R}$ l'insieme dei numeri reali. In $\mathbb{R}$ sono definite le operazioni di *Addizione* e *Moltiplicazione* ed una *relazione d'ordine totale* $\leq$ (minore o uguale) con le seguenti proprietà

(1) Per ogni coppia di numeri reali a, b si ha
$$a + b = b + a$$
(proprietà commutativa dell'Addizione)

(2) Per ogni $a, b, c \in \mathbb{R}$ si ha
$$a + (b + c) = (a + b) + c$$
(proprietà associativa dell'Addizione)

(3) Esiste ed è unico l'elemento 0 (zero) tale che per ogni $a \in \mathbb{R}$ si ha
$$0 + a = a + 0 = a.$$
(esistenza dell'elemento neutro rispetto all'Addizione)

(4) Per ogni $a \in \mathbb{R}$ esiste un unico simmetrico rispetto all'Addizione, detto anche opposto, $-a \in \mathbb{R}$ tale che
$$a + (-a) = 0$$

(5) Per ogni coppia di numeri reali a, b si ha
$$a \cdot b = b \cdot a$$
(proprietà commutativa della Moltiplicazione)

(6) Per ogni $a, b, c \in \mathbb{R}$ si ha
$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$
(proprietà associativa della Moltiplicazione)

(7) Esiste ed è unico l'elemento 1 (uno),diverso da 0, tale che per ogni $a \in \mathbb{R}$ si ha
$$1 \cdot a = a \cdot 1 = a.$$
(esistenza dell'elemento neutro rispetto alla Moltiplicazione)

(8) Per ogni $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$ esiste un unico simmetrico rispetto alla Moltiplicazione, detto l'inverso o il reciproco di a, indicato con a^{-1} o con $1/a$ tale che
$$a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$$

(9) Per ogni $a, b, c \in \mathbb{R}$ si ha
$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$
(proprietà distributiva della Moltiplicazione rispetto all'Addizione)

Date: September 15, 2010.

La relazione $\leq$ è di ordine totale in $\mathbb{R}$ ossia, comunque si considerino due numeri reali a, b necessariamente deve aversi $a \leq b$ oppure $b \leq a$ e sono vere entrambe se e solo se $a = b$.
Inoltre tale relazione $\leq$ è compatibile con le operazioni nel senso precisato dalle proprietà : $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$

$$a \leq b \Longrightarrow a + c \leq b + c$$
$$0 \leq a \text{ e } 0 \leq b \Longrightarrow 0 \leq a \cdot b$$

Notazione: $a < b \Longleftrightarrow a \leq b$ e $a \neq b$
Per ogni coppia di numeri reali $a, b \in \mathbb{R}$ vale una ed una sola delle seguenti relazioni

$$a < b, \quad a = b, \quad a > b.$$

Dimostrare che

$$[1]\, \forall a \in \mathbb{R}, \qquad a \cdot 0 = 0$$
$$[2]\, \forall a \in \mathbb{R}, \qquad -(-a) = a$$
$$[3]\, \forall a \in \mathbb{R}, \qquad (-1) \cdot a = -a$$

[1] dim. $a + a0 = a1 + a0 = a(1 + 0) = a = a + 0$. segue dalla legge di cancellazione dell'Addizione (dimostrare per esercizio [MS]).
[2] dim $a + (-a) = (-a) + a = 0$ a è l'opposto di $-a$, ossia a=-(-a). per l'unicità dell'opposto (dimostrare per esercizio) [MS]).
[3] dim. $(-1)a + a = [-1 + 1]a = 0a = 0$, quindi $(-1)a$ è l'opposto di a.
Dimostrare per esercizio che

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \qquad -(a + b) = (-a) + (-b)$$
$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \qquad (-a) \cdot b = -(a \cdot b)$$
$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \qquad (-a) \cdot (-b) = a \cdot b$$
$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \qquad a \cdot b = 0 \text{ e } a \neq 0 \Longrightarrow b = 0$$
$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \qquad a \cdot b = 0 \Longleftrightarrow a = 0 \text{ oppure } b = 0$$

[MS] Paolo Marcellini Carlo Sbordone Elementi di Analisi Matematica uno, Liguori editore.