

Facoltà di Architettura "Valle Giulia"

Corso di Laurea in Architettura UE

Corso di Laurea in Scienze dell'architettura e della città UE

Istituzioni di Matematica 1 a.a. 2009-2010

<http://www.dmmm.uniroma1.it/persone/capitanelli>

1 I NUMERI E LE FUNZIONI REALI

Introduzione al corso.

Cenni di teoria degli insiemi: unione, intersezione, differenza, prodotto cartesiano.

Notazione dei quantificatori.

Cenni sui numeri naturali, interi relativi, razionali, reali $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$.

Definizione assiomatica dei numeri reali.

Proposizione 1.1 *Non esiste alcun numero razionale q tale che $q^2 = 2$. (dim)*

Osservazione 1.2 \mathbb{Q} non soddisfa l'assioma di completezza.

Intervalli.

$$[a, b] := \{x \in \mathbb{R}, a \leq x \leq b\}$$

$$[a, b) := \{x \in \mathbb{R}, a \leq x < b\}$$

$$(a, b] := \{x \in \mathbb{R}, a < x \leq b\}$$

$$(a, b) := \{x \in \mathbb{R}, a < x < b\}$$

$$(a, \infty) := \{x \in \mathbb{R}, x > a\}$$

$$[a, \infty) := \{x \in \mathbb{R}, x \geq a\}$$

$$(-\infty, b) := \{x \in \mathbb{R}, x < b\}$$

$$(-\infty, b] := \{x \in \mathbb{R}, x \leq b\}.$$

Esercizio 1.3 Sia $A = \{x \in \mathbb{R}, 2 \leq x \leq 6\}$ e $B = \{x \in \mathbb{N}, 3 < x \leq 7\}$. Determinare $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$, $B - A$.

Esercizio 1.4 Sia $A = \{x \in \mathbb{N}, 2 \leq x \leq 6\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R}, 3 \leq x \leq 7\}$. Determinare $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$, $B - A$.

Esercizio 1.5 Sia $A = \{x \in \mathbb{R}, 2 \leq x \leq 6\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R}, 3 < x \leq 7\}$. Determinare $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$, $B - A$.

Esercizio 1.6 Sia $A = \{x \in \mathbb{N}, 2 \leq x \leq 6\}$ e $B = \{x \in \mathbb{N}, 3 \leq x \leq 7\}$. Determinare $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$, $B - A$.

Esercizio 1.7 Sia $A = \{x \in \mathbb{N}, x \leq 5\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R}, x \geq 3\}$. Determinare $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$, $B - A$.

Esercizio 1.8 Sia $A = \{x \in \mathbb{N}, x \leq 5\}$ e $B = \{x \in \mathbb{N}, x \geq 3\}$. Determinare $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$, $B - A$.

Esercizio 1.9 Sia $A = \{x \in \mathbb{R}, x \leq 5\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R}, x > 3\}$. Determinare $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$, $B - A$.

Esercizio 1.10 Sia $A = \{x \in \mathbb{R}, x \leq 5\}$ e $B = \{x \in \mathbb{N}, x > 3\}$. Determinare $A \cup B$, $A \cap B$, $A - B$, $B - A$.

Funzioni e rappresentazione cartesiana

Definizione 1.11 *Funzione, dominio, codominio, grafico.*

Definizione 1.12 *Funzione iniettiva, suriettiva, biettiva*

Definizione 1.13 *Funzione invertibile. Funzione inversa.*

Definizione 1.14 *Funzioni crescenti e decrescenti, strettamente decrescenti e strettamente crescenti. Funzioni monotone.*

Esercizio 1.15 *Studio delle funzioni $f(x) = 3$, $f(x) = 2x + 1$, $f(x) = \frac{1}{x}$, $f(x) = \sqrt{x}$, $f(x) = x^2$, $f(x) = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Z} \\ 1 & x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z} \end{cases}$, $f(x) = \begin{cases} 2 & x \leq 1 \\ 4 & x > 1 \end{cases}$.*

Definizione 1.16 *Operazioni con le funzioni.*

Definizione 1.17 *Funzione composta.*

Esercizio 1.18 *Siano $f(x) = x^3$, $g(x) = 2x$. Determinare f^{-1} , g^{-1} , $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$, $g \cdot f$, $\frac{f}{g}$, $\frac{g}{f}$, $f \circ g$ e $f \circ f$*

Esercizio 1.19 *Siano $f(x) = x + 4$, $g(x) = x^5$. Determinare f^{-1} , $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$, $g \cdot f$, $\frac{f}{g}$, $\frac{g}{f}$, $f \circ g$ e $f \circ f$*

Definizione 1.20 *Funzioni lineari. Principali proprietà. Grafici.*

Definizione 1.21 *Funzione valore assoluto. Principali proprietà. Grafici.*

Proposizione 1.22 *Per ogni numero reale $r \geq 0$, risulta*

$$|x| < r \Leftrightarrow -r < x < r$$

$$|x| \leq r \Leftrightarrow -r \leq x \leq r.$$

Proposizione 1.23 *Disuguaglianza triangolare.*

Esercizio 1.24 *Risolvere*

$$|x| = 4, |x| \leq 3, |x + 2| \leq 3, x^2 + 2|x| - 3 < 0, x^2 - 2|x| - 3 > 0, |x^2 + 1| \geq 2$$

Definizione 1.25 *Le funzioni potenza. Principali proprietà. Grafici.*

Definizione 1.26 *Funzioni esponenziali. Principali proprietà. Grafici.*

Definizione 1.27 *Logaritmi. Principali proprietà. Grafici.*

Definizione 1.28 *Funzioni trigonometriche. Principali proprietà. Grafici.*

Definizione 1.29 *Funzioni trigonometriche inverse. Principali proprietà. Grafici.*

Esercizio 1.30 *Risolvere*

$$\ln_5 x > 2, \ln_3 x < \frac{1}{2}, \ln_{\frac{1}{7}} x < \sqrt{2}, \ln(1 + \frac{1}{x}) \leq 1, 2^x > 4, 4^x > 2, e^{|x-1|} < e^x, (\frac{1}{3})^{(1-12x)x} < 3, (\frac{1}{3})^x > 9, \sin x = 5, \sin x = 1, \sin x = \frac{1}{2}, \cos x > 3, \cos x > \frac{1}{2}, \cos x > -2, \cos x < -2, \tan x = 1, \tan x > 0, \arcsin x > 0, \arccos x < 0, \arctan x < 0, \arctan x < 4.$$

Esercizio 1.31 *Determinare il campo di esistenza delle seguenti funzioni $\sqrt{x+1}$, $\sqrt[3]{x+1}$, $\sqrt{2-x^2}$, $\sqrt[4]{\frac{x+1}{6-x}}$, 3^{2-x^2} , $6^{\cos x}$, $\ln \sqrt{x}$, $\sqrt{\ln x}$, $\sqrt{\tan x}$, $\cos(\sqrt{x})$, $\tan(\sqrt{x})$, $\cos(\sqrt{\tan x})$, $\sqrt[4]{3 - \ln_2 x}$, $\ln \sqrt{\frac{x+1}{x}}$, $3^{\ln x}$, $\sqrt{\ln_{\frac{1}{3}}(2x-1)}$, $(\ln_5 x - 5)^{-\pi}$, $\arcsin(\ln x)$, $\ln_x 6$, $\ln_x x$, $\ln_x(\ln x)$, $\arcsin(2^x)$, x^x , $\frac{\sin \ln x}{\ln x}$, $\ln_x(x^2 + 4x)$, $\ln_x \sqrt{\frac{x+2}{x-2}}$, $\ln_x(x^2 - 3x + 2)$, $\arccos(\frac{x-1}{x+3})$, $\arctan(\frac{\cos x}{x^2+3})$, $\cos(\frac{\arcsin x}{x^3})$.*

2 COMPLEMENTI AI NUMERI REALI

Definizione 2.1 *Massimo e minimo di un insieme A di numeri reali.*

Osservazione 2.2 *Il massimo di un insieme, se esiste, è unico. (dim)*

Definizione 2.3 *Maggiorante e minorante di un insieme.*

Definizione 2.4 *Insiemi limitati superiormente, limitati inferiormente, limitati.*

Proposizione 2.5 *Un insieme A è limitato se e soltanto se esiste M tale che $|a| < M$, $\forall a \in A$.*

Osservazione 2.6 *Ci sono insiemi limitati superiormente che non ammettono massimo.*

Definizione 2.7 *Estremo superiore. Estremo inferiore.*

Teorema 2.8 *Teorema di esistenza dell'estremo superiore. (dim)*

Osservazione 2.9 *Il massimo di un insieme, se esiste, è anche estremo superiore.*

Definizione 2.10 *Se A non è limitato superiormente, definiamo $\sup A = \infty$. Se A non è limitato inferiormente, definiamo $\inf A = -\infty$.*

Osservazione 2.11 *L'esistenza dell'estremo superiore di un insieme limitato superiormente non vale in \mathbb{Q} .*

Esercizio 2.12 *Calcolare estremo superiore e inferiore (specificando se si tratta di massimo e minimo) dei seguenti insiemi*

$$A = \left\{ \frac{n-1}{n}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$B = \left\{ \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$C = \left\{ \frac{5n+1}{n}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$D = \{x \in \mathbb{R}, x^2 - 1 \leq 0\}$$

$$E = \{x \in \mathbb{R}, x^2 - 4 > 0\}$$

$$F = \{x \in \mathbb{R}, |x^2 - 9x + 7| < 0\}$$

$$G = \{x \in \mathbb{R}, \sin x > \cos x\}$$

$$H = \{x \in \mathbb{R}, \sqrt{x^2 - 1} > x - 3\}$$

$$I = \{x \in \mathbb{R}, \sqrt{x^2 - 1} > x + 3\}$$

$$L = \left\{ x \in \mathbb{R}, \log_{\frac{1}{3}}(\log_2 x) > 0 \right\}$$

$$M = \{x \in \mathbb{R}, 2x - 1 > \sqrt{4x + 1}\}$$

$$N = \{x \in \mathbb{R}, \sqrt{x + 2} > \sqrt{4 - x}\}$$

$$O = \{x \in \mathbb{R}, |x^2 - 9x + 7| < 7\}$$

3 LIMITI

Definizione 3.1 *Successioni.*

Rappresentazione delle successioni.

Esercizio 3.2 *Rappresentare le seguenti successioni*

$$a_n = n$$

$$a_n = \frac{1}{n}$$

$$a_n = \frac{n-1}{n}$$

$$a_n = (-1)^n$$

$$a_n = 3$$

$$a_n = n^2$$

$$a_n = -n^2.$$

Definizione 3.3 *Limite di successione ad un numero reale. Successione convergente.*

Interpretazione grafica del limite.

Esercizio 3.4 *Verificare, tramite la definizione, che*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{n} = 1.$$

Esercizio 3.5 *Verificare che non è vero che*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 1.$$

Teorema 3.6 *Il limite di una successione, se esiste, è unico. (dim)*

Osservazione 3.7 *Cambiare un numero finito di termini della successione non modifica il suo limite.*

Definizione 3.8 *Limite di successione a $+\infty$. Limite di successione a $-\infty$. Successione divergente.*

Interpretazione grafica del limite.

Esercizio 3.9 *Verificare, tramite la definizione, che*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 = \infty$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} -n^2 = -\infty.$$

Osservazione 3.10 *Ci sono successioni che non ammettono limite. Ad esempio: $a_n = (-1)^n$.*

Definizione 3.11 *Successione regolare. Successione non regolare.*

Definizione 3.12 *Successione infinita. Successione infinitesima.*

Definizione 3.13 *Successioni limitate superiormente, limitate inferiormente, limitate.*

Teorema 3.14 *Ogni successione convergente è limitata.*

Osservazione 3.15 *L'esempio della successione $a_n = (-1)^n$ mostra che il viceversa non è vero.*

Operazioni con i limiti

Proposizione 3.16 *Operazioni con i limiti finiti.*

Esercizio 3.17 Calcolare i seguenti limiti

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^b} = 0 \quad \forall b \in \mathbb{N}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^3 + 3n + 1}{4n^3 + 5n^2 + 7} = \frac{5}{4}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-n^2 + 1}{n^2 - 2n + 1} = -1.$$

Proposizione 3.18 Operazioni con i limiti infiniti.

Forme indeterminate

$$\infty - \infty \quad \infty \cdot 0 \quad \frac{\infty}{\infty} \quad \frac{0}{0} \quad 0^0 \quad (\pm\infty)^0 \quad 1^{\pm\infty}$$

Osservazione 3.19 Dire che un limite è una forma indeterminata non vuole dire che il limite non esiste ma che è necessario uno studio più approfondito.

Esercizio 3.20 Calcolare i seguenti limiti

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n+2} - \sqrt{n-1} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8n^4 + 1}{4n^3 + 6n^2 + 2} = \infty$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^2 + 9n + 4}{n^6 + 1} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n+1} - n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-n}{\sqrt{n+1}}$$

Teoremi di confronto

Teorema 3.21 Teorema della permanenza del segno.

Teorema 3.22 Teorema dei carabinieri.

Teorema 3.23 Teorema del limite del prodotto di una successione limitata per una infinitesima. Se a_n è limitata e b_n è infinitesima, allora $a_n b_n$ è infinitesima.

Esercizio 3.24 Calcolare

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \frac{1}{n} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \frac{1}{n^2 + 1} = 0.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n}{n^3} = 0$$

Successione monotone

Definizione 3.25 Successioni crescenti, decrescenti, strettamente crescenti, strettamente decrescenti, monotone, strettamente monotone.

Teorema 3.26 Teorema sulle successioni monotone.

Osservazione 3.27 Una successione crescente a_n ammette sempre limite, uguale a $\sup_n a_n$. Tale limite è quindi finito se a_n è limitata superiormente, altrimenti vale $+\infty$.

Esempio 3.28 Si può dimostrare che la successione $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ è crescente e limitata, quindi converge. Si dimostra che il suo limite è un numero irrazionale che si denota con e il cui sviluppo decimale comincia con 2,7182818284....

Esercizio 3.29 Dimostrare che la successione $a_n = \frac{1}{n}$ è strettamente decrescente e limitata inferiormente. Qual è il suo limite?

Esercizio 3.30 Dimostrare che la successione $a_n = \frac{n-1}{n}$ è strettamente crescente e limitata superiormente. Qual è il suo limite?

Alcuni limiti notevoli

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a^n \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^b} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x \\ a_n \rightarrow 0 \Rightarrow \sin a_n \rightarrow 0 \\ a_n \rightarrow 0 \Rightarrow \cos a_n \rightarrow 1 \\ a_n \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{\sin a_n}{a_n} \rightarrow 1 \end{aligned}$$

Infiniti di ordine crescente

Tabella degli infiniti. Le seguenti successioni sono in ordine crescente di infinito:

$$\log n, n^b, a^n, n!, n^n.$$

Osservazione 3.31 Il precedente ordinamento degli infiniti continua a valere anche nel caso in cui ciascun elemento sia elevato alla stessa potenza positiva. Esempio: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\log n)^5}{n^5} = 0$.

Osservazione 3.32 Il seguente ordinamento degli infiniti

$$\log n, n^b, a^n, n^n$$

continua a valere anche nel caso in cui ciascun elemento sia elevato ad una potenza positiva differente. Esempio: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\log n)^{5000000}}{3^{69897543} n} = 0$.

Definizione 3.33 Successioni asintoticamente equivalenti. Diremo che 2 successioni a_n, b_n sono asintoticamente equivalenti ($a_n \sim b_n$) se $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$.

Proposizione 3.34 Principio di sostituzione. Se $a_n \sim b_n$ e $a_n \rightarrow l$, allora anche $b_n \rightarrow l$.

Osservazione 3.35 Non vale il viceversa: due successioni che hanno lo stesso limite non sono necessariamente asintoticamente equivalenti. Esempio: $a_n = \frac{1}{n}$, $b_n = \frac{1}{n^2}$.

Esercizio 3.36 Calcolare i seguenti limiti

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log n}{n} = 0 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 2n}{5n^3} = 0 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \sin n \text{ non esiste} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n}{n} = 0 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} 4^n = \infty \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} 6^n - 7^n = -\infty \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{7} = 1 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} n - \log n = \infty \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = e \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n &= \frac{1}{e} \\
\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{7}{n}\right)^n &= e^7 \\
\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} &= 1 \\
\lim_{n \rightarrow \infty} n \sin \frac{1}{n} &= 1 \\
\lim_{n \rightarrow \infty} n \sin \frac{4}{n} &= 4 \\
\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log n^2 + n^3 + 6^n}{3^n + 8^n} &= 0 \\
\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + \sin n - e^n}{\log n^2 + n^n} &= 0 \\
\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{2n}}{(e^{2n} - 1)} &= 1 \\
\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n - \frac{4}{n}\right) \left(\sqrt{1 + \frac{3}{n}} - 1\right) &= \frac{3}{2} \\
\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sin(\sin^4 n)\right]^{\frac{n}{4}} &= 0 \\
\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{2}{n}}{\sin \frac{5}{n}} &= \frac{2}{5} \\
\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\log n^2 \sin \frac{1}{n}} &= \infty \\
\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{3} + \frac{1}{n}\right) \sin \frac{5}{n} &= \frac{5}{3} \\
\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{\sqrt{n^n}} &= \infty \\
\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n + n^3}{n!} &= 0 \\
\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n^3}{n^3} &= 0 \\
\lim_{n \rightarrow \infty} \log \left(\frac{n+3}{n}\right)^n &= 3 \\
\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n+1}{n}\right)^n &= \infty \\
\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \sin \frac{3}{n^2} &= 3 \\
\lim_{n \rightarrow \infty} n^4 \cos \frac{3}{n^4} &= \infty \\
\lim_{n \rightarrow \infty} \log n^3 \sin \frac{1}{\sqrt{n}} &= 0 \\
\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-5}{n}\right)^{3n} &= e^{-15}
\end{aligned}$$

Esercizio 3.37 Calcolare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, i seguenti limiti

$$\begin{aligned}
&\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{n\alpha} \cos^5 n}{n(e^{2n} - 1)} \\
&\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^4 + n^3} - \sqrt{n^4 - n^3}}{n^\alpha + n} \\
&\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha^n + (-1)^n}{n \log n} \\
&\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\log n^\alpha + \frac{1}{n^{\alpha+1}} \right)
\end{aligned}$$

Introduzione del concetto di limite per le funzioni.

Definizione 3.38 Punto isolato. Punto di accumulazione

Definizione 3.39 Limite di una funzione.

Definizione 3.40 Limite destro e limite sinistro di una funzione.

Legame tra limiti di funzioni e limiti di successioni.

Teorema 3.41 *TEOREMA PONTE.* Le seguenti relazioni sono tra loro equivalenti ($x_0, l \in \mathbb{R}$)

$$\forall x_n \rightarrow x_0, x_n \in A - \{x_0\} \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow f(x_n) \rightarrow l$$

\Downarrow

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : x \in A, 0 \neq |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$$

Interpretazione grafica del limite.

Esempi e proprietà dei limiti di funzione.

Teorema 3.42 *Teoremi di confronto.* (dim)

Teorema 3.43 *Operazioni con i limiti di funzioni.*

Teorema 3.44 *Limiti di funzione composte.*

Osservazione 3.45 *Si tratta di un cambio di variabile nel limite.*

Esercizio 3.46 *Applicando la definizione di limite, verificare che*

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 6x + 8}{x - 2} = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln x = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (-\ln x) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 1}{x^2 + 1} = 2$$

Alcuni limiti notevoli.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} a^x$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\alpha}{x}\right)^x = e^\alpha$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x^b} = 0 \quad b > 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^b}{a^x} = 0 \quad b > 0 \quad a > 1$$

Esercizio 3.47 *Calcolare i seguenti limiti*

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^b - 1}{x} = b$$

Esercizio 3.48 *Calcolare i seguenti limiti*

$$\lim_{x \rightarrow 2} 3x = 6$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+5}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{3x+2} = \frac{1}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} -x^7 = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^b} = 0 \quad \forall b \in \mathbb{N}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 + 3x + 1}{5x^4 + 8x^2 + 2} = \frac{3}{5}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^8 - 1}{x^6 + 1} = \infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x - 1} - \sqrt{x + 2} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4}{3x^3 + 6x^2 + 2} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^8 + 9x^4 + 4}{x^9 + 1} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x + 1} - x$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - x}{\sqrt{x + 1}}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^x = e^3$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x^4}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sin x \text{ non esiste}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin 2x}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} 5^x = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{6}\right)^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} 9^x - 7^x = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x - \log x = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x}\right)^x = e^2$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{3x}\right)^x = \frac{1}{\sqrt[3]{e}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{2x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{5x} - 1}{2x} = \frac{5}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^3} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{4x} - 1}{\sin 2x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 2x)}{x} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{\sin 2x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 2x)}{\sin 3x} = \frac{2}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{\tan 2x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sin x)}{x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^2}{e^{3(x-1)^2} - 1} = \frac{1}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{(x-3)^4}{(e^{x^2 - 9} - 1)^4} = \frac{1}{6^4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos(\frac{\pi}{2}x)}{1-x} = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + bx + c} - x = \frac{b}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(\frac{\pi}{2}x)}{1-x} = 1$$

4 FUNZIONI CONTINUE

Definizione 4.1 *Funzione continua in un punto. Funzione continua in un intervallo.*

Teorema 4.2 *Operazioni con i limiti di funzioni continue.*

Osservazione 4.3 *Molte funzioni elementari sono continue nel loro insieme di definizione: le potenze $f(x) = x^a$, le funzioni esponenziali $f(x) = a^x$, con $a > 0$, le funzioni logaritmiche $f(x) = \log_a x$, con $a > 0, a \neq 1$, le funzioni trigonometriche $f(x) = \sin x$, $f(x) = \cos x$, $f(x) = \tan x$, la funzione valore assoluto $f(x) = |x|$.*

Definizione 4.4 *Discontinuità eliminabile, di prima specie, di seconda specie.*

Esercizio 4.5 Studiare la continuità delle seguenti funzioni

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x+|x|}{x^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}} \sin x & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Esercizio 4.6 Determinare a e b in modo tale che la seguente funzione sia continua in \mathbb{R}

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & x \leq -\frac{\pi}{2} \\ a \sin x + b & -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ \cos x & x \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Esercizio 4.7 Determinare $\alpha \in \mathbb{R}$, in modo tale che la seguente funzione sia continua in \mathbb{R}

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{3x}-1}{x} + 2 & x \neq 0 \\ \alpha & x = 0 \end{cases}$$

Esercizio 4.8 Determinare $\alpha \in \mathbb{R}$, in modo tale che la seguente funzione sia continua in $(-\pi, \infty)$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1-e^{x^3}}{\sin x^3} & -\sqrt[3]{\pi} < x < 0 \\ -(x+\alpha)^2 & x \geq 0 \end{cases}$$

Esercizio 4.9 Studiare la continuità in \mathbb{R} della seguente funzione

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{x^2}-1}{\ln(x^2+1)} & x > 0 \\ \frac{2x^2+x^3}{(x-1)^2} & x \leq 0 \end{cases}$$

Esercizio 4.10 Determinare $\alpha \in \mathbb{R}$, in modo tale che la seguente funzione sia continua in \mathbb{R}

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x^2} & x \leq 0 \\ 1 + e^{-\frac{1}{x^\alpha}} & x > 0 \end{cases}$$

Esercizio 4.11 Determinare $\alpha \in \mathbb{R}$, in modo tale che la seguente funzione sia continua in \mathbb{R}

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ \frac{\sin(x^{\frac{1}{3}})}{x^\alpha} & x \neq 0 \end{cases}$$

Esercizio 4.12 Determinare $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ e $\alpha \in \mathbb{R}^+$, in modo tale che la seguente funzione sia continua in \mathbb{R}

$$f(x) = \begin{cases} c|x|^\alpha + bx^2 + d & x \leq 0 \\ a & x = 0 \\ \frac{\log(1+x)}{x^2+1} & x \geq 0 \end{cases}$$

Alcuni teoremi sulle funzioni continue

Teorema 4.13 *Teorema di permanenza del segno per funzioni continue.*

Teorema 4.14 *Teorema dell'esistenza degli zeri.*

Osservazione 4.15 *Tale punto in generale non è unico. Sicuramente è unico se f è strettamente monotona.*

Teorema 4.16 *Teorema di Weierstrass.*

Osservazione 4.17 *Se l'intervallo non è chiuso, il risultato è falso. Esempio: $f(x) = x$ in $(0, 1)$.*

Osservazione 4.18 *Se l'intervallo non è limitato, il risultato è falso. Esempio: $f(x) = \frac{1}{x}$ in $[1, \infty)$.*

Osservazione 4.19 *Se f non è continua, il risultato è falso. Esempio: $f(x) = \begin{cases} x & x \in [0, 1) \\ 0 & x = 1 \end{cases}$ in $[0, 1]$.*

Teorema 4.20 *Teorema dell'esistenza dei valori intermedi. (dim)*

Teorema 4.21 *Teorema di continuità delle funzioni inverse.*

Osservazione 4.22 *La funzione inversa di una funzione monotona ha la stessa monotonia di f (strettamente crescente se f è strettamente crescente, strettamente decrescente se f è strettamente decrescente).*

5 DERIVATE

Introduzione del concetto di derivata.

Definizione 5.1 *Derivata di una funzione in un punto. Funzione derivabile in un punto. Funzione derivabile in un intervallo. Derivata destra e sinistra di una funzione in un punto.*

Osservazione 5.2 *Una funzione è derivabile in un punto se e solo se esistono finite la derivata destra e la derivata sinistra in tale punto e coincidono.*

Esempio 5.3 *La derivata di una funzione costante è nulla in ogni punto.*

Teorema 5.4 *Se f è una funzione derivabile in x_0 , allora è anche continua in x_0 . (dim)*

Osservazione 5.5 *Una funzione continua può non essere derivabile. Ad esempio, $f(x) = |x|$ è continua in \mathbb{R} ma non è derivabile in $x = 0$.*

Teorema 5.6 *Operazioni con le derivate.*

Teorema 5.7 *Teorema di derivazione delle funzioni composte.*

Teorema 5.8 *Teorema di derivazione delle funzioni inverse.*

Derivate delle funzioni elementari. Utilizzando la definizione e i teoremi di derivazione, calcolare le derivate delle seguenti funzioni

$$f(x) = x^a$$

$$f(x) = a^x$$

$$f(x) = \log_a x$$

$$f(x) = \sin x$$

$$f(x) = \cos x$$

$$f(x) = \tan x$$

$$f(x) = \arcsin x$$

$$f(x) = \arccos x$$

$$f(x) = \arctan x$$

Significato geometrico della derivata.

Equazione della retta tangente al grafico di una funzione derivabile nel punto $(x_0, f(x_0))$:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Esercizio 5.9 Calcolare la derivata delle seguenti funzioni

$$f(x) = x^2$$

$$f(x) = \sqrt[5]{x}$$

$$f(x) = 4x + \sqrt[4]{x+3} + 38$$

$$f(x) = 2^x$$

$$f(x) = (7x + 8)^5$$

$$f(x) = \log_3 x$$

$$f(x) = \sin 2x$$

$$f(x) = \cos(3x + 4)^2$$

$$f(x) = \tan x$$

$$f(x) = \arcsin 6x$$

$$f(x) = \arccos 8x$$

$$f(x) = \arctan 3x$$

$$f(x) = 2^x + 4x + 5$$

$$f(x) = \sin(\log x)$$

$$f(x) = \log(\sin x)$$

$$f(x) = \sqrt[3]{\sin x}$$

$$f(x) = \sin(\sqrt[3]{x})$$

$$f(x) = \ln(\ln x)$$

$$f(x) = \ln(\ln(\ln x))$$

$$f(x) = (x + 1)^{x+2}$$

$$f(x) = \frac{1}{\arctan \frac{1}{\sqrt{x}}}$$

Esercizio 5.10 Calcolare l'equazione della retta tangente alla funzione $f(x) = 3e^x + 4$ in $x = 2$.

Esercizio 5.11 Determinare gli insiemi di continuità e derivabilità della funzione

$$f(x) = \begin{cases} \ln(1+x) & x \geq 0 \\ |1+x| - 1 & x < 0 \end{cases}$$

Esercizio 5.12 Determinare gli insiemi di continuità e derivabilità della funzione

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x(x-2)} & x \geq 2 \\ \sqrt{x} - \frac{1}{x-2} & 0 < x < 2 \\ \sqrt{x(x-2)} & x \leq 0 \end{cases}$$

Esercizio 5.13 Determinare gli insiemi di continuità e derivabilità della funzione

$$f(x) = |4x - 1 + (5 - 3x)|$$

Esercizio 5.14 Determinare gli insiemi di continuità e derivabilità della funzione

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Esercizio 5.15 Determinare gli insiemi di continuità e derivabilità della funzione

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Esercizio 5.16 Determinare gli insiemi di continuità e derivabilità della funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Esercizio 5.17 Studiare la derivabilità delle funzioni degli esercizi 4.5, 4.6, 4.7, 4.8, 4.9, 4.10, 4.11 e 4.12.

6 APPLICAZIONI DELLE DERIVATE

Applicazioni delle derivate per il calcolo dei limiti

Teorema 6.1 Teorema di L'Hôpital.

Osservazione 6.2 Il teorema di L'Hôpital non fornisce informazioni quando $\lim \frac{f'}{g'}$ non esiste. In tal caso il limite $\lim \frac{f}{g}$ potrebbe esistere o non esistere.

Esempio. $f(x) = x - \sin x$, $g(x) = x$, per $x \rightarrow \infty$.

Esempio. $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$, $g(x) = x$, per $x \rightarrow 0^+$.

Esempio. $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$, $g(x) = x$, per $x \rightarrow 0^+$.

Osservazione 6.3 Si può iterare il procedimento più volte.

Esempio. $f(x) = e^x$, $g(x) = x^3$, per $x \rightarrow \infty$.

Esercizio 6.4 Calcolare i seguenti limiti

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-1}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-1}{x} \text{ (è una forma indeterminata?)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{\log x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x + x \sin x}{x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{5x} - 1}{\sin 4x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+4x)}{e^{3x} - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{\cos \sqrt{x} - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+1}{x} - \frac{1}{\ln(x+1)} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\tan x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (1 + 2\cos^2 x)^{\tan^2 x} = e^2$$

Esercizio 6.5 Data la funzione $f(x) = \begin{cases} x^4 + 3x^3 & x \geq 0 \\ \frac{\ln(1+x^2)-x^2}{\sqrt[3]{x}} & x < 0 \end{cases}$

Stabilire se f è continua in \mathbb{R} .

Calcolare la derivata sinistra e destra di f in 0.

Stabilire se f è derivabile in \mathbb{R} .

Applicazioni delle derivate per lo studio delle proprietà di funzioni

Definizione 6.6 Massimo relativo. Minimo relativo.

Definizione 6.7 Massimo assoluto. Minimo assoluto.

Osservazione 6.8 Il massimo assoluto di f , se esiste, è unico. Il punto di massimo può invece non essere unico.

Teorema 6.9 Teorema di Fermat. (dim)

Significato geometrico del teorema di Fermat.

Osservazione 6.10 Se una funzione è continua in un intervallo chiuso e limitato, i punti di massimo e minimo assoluti vanno ricercati tra: 1. i punti interni dove si annulla la derivata; 2. gli estremi dell'intervallo; 3. gli eventuali punti di non derivabilità.

Teorema 6.11 Teorema di Rolle. (dim)

Significato geometrico del Teorema di Rolle.

Teorema 6.12 Teorema di Lagrange. (dim)

Significato geometrico del Teorema di Lagrange.

Osservazione 6.13 La continuità agli estremi dell'intervallo è una ipotesi indispensabile.

Esempio: $f(x) = \begin{cases} x & x \in [0, 1) \\ 0 & x = 1 \end{cases}$ in $[0, 1]$.

Teorema 6.14 Criterio di monotonia.

Teorema 6.15 Caratterizzazione delle funzioni costanti in un intervallo.

Teorema 6.16 Criterio di stretta monotonia.

Osservazione 6.17 Una funzione strettamente monotona può avere derivata nulla in qualche punto. Esempio: la funzione $f(x) = x^3$ è strettamente crescente in \mathbb{R} , ma la sua derivata si annulla in $x = 0$.

Definizione 6.18 Funzione convessa. Funzione concava.

Teorema 6.19 Criterio di convessità.

Definizione 6.20 Punto di flesso.

Osservazione 6.21 In un punto di flesso il grafico di f attraversa la retta tangente.

Osservazione 6.22 Se f è derivabile due volte, allora in un punto di flesso la derivata seconda si annulla.

Teorema 6.23 Criterio per i punti di massimo e di minimo (valido per funzioni che ammettono derivata seconda).

Schema per lo studio di un grafico di funzione.

Esercizio 6.24 Studiare le seguenti funzioni f

$$f(x) = x^3$$

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

$$f(x) = e^x$$

$$f(x) = \ln x$$

$$f(x) = \sin x$$

$$f(x) = \cos x$$

$$f(x) = \tan x$$

$$f(x) = \arcsin x$$

$$f(x) = \arccos x$$

$$f(x) = \arctan x$$

$$f(x) = x^3 - 3x^2$$

$$f(x) = \frac{x^2+6x+6}{x+1}$$

$$f(x) = \frac{x^2-x}{x-2}$$

$$f(x) = \frac{x}{x^2+3}$$

$$f(x) = \frac{(x+1)^3}{x^2}$$

$$f(x) = xe^{-2x^2}$$

$$f(x) = xe^x$$

$$f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$$

$$f(x) = e^{\frac{|x-1|}{x}}$$

$$f(x) = xe^{\frac{|x-1|}{x}}$$

$$f(x) = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad (\text{seno iperbolico})$$

$$f(x) = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad (\text{coseno iperbolico})$$

$$f(x) = \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} \quad (\text{tangente iperbolica})$$

$$f(x) = x \log x$$

$$f(x) = x \log^2 x$$

$$f(x) = x^x$$

$$f(x) = \frac{x}{|x|+|1-x|}$$

$$f(x) = \sqrt{2-x} - \sqrt{x}$$

$$f(x) = \sin^2 x - \sin x$$

specificandone dominio; segno e zeri di f ; limiti agli estremi degli intervalli costituenti il dominio; asintoti; continuità, esistenza e calcolo delle derivata prima f' ; segno e zeri di f' ; intervalli di monotonia di f e punti stazionari; massimi e minimi relativi; esistenza e calcolo della derivata seconda f'' : intervalli di concavità e convessità e punti di flesso; grafico di f .

Esercizio 6.25 Determinare massimo e minimo della funzione $f(x) = \sin^2 x + \sqrt{2} \cos x$ in $[0, 2\pi]$.

Esercizio 6.26 Determinare massimo e minimo della funzione $f(x) = x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 6x$ in $[0, 2\pi]$.

Applicazione delle derivate per l'approssimazione di una funzione regolare in un intorno di un punto tramite polinomi.

Teorema 6.27 *La formula di Taylor.*

Definizione 6.28 *Formula di Mac Laurin.*

Esercizio 6.29 *Sviluppo delle funzioni elementari.*

Teorema 6.30 *Condizioni sufficienti per massimi e minimi.*

Uso della formula nel calcolo dei limiti.

Esercizio 6.31 *Calcolare i seguenti limiti*

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x \sin x} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{-\frac{1}{x^2}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x + x \sin x}{x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x^2) - x^2}{\sqrt[3]{x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x + \log(\cos x)}{x^4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1+x^2)^2 \sin(x-1)}{\sqrt{x} \ln x}$$

Definizione 6.32 *Differenziale.*

Teorema 6.33 *Teorema del differenziale. (dim)*

Interpretazione geometrica del differenziale.

7 ELEMENTI DI CALCOLO COMBINATORIO

Introduzione.

Definizione 7.1 *Disposizioni.*

Teorema 7.2 *Numero delle disposizioni. (dim)*

Esercizio 7.3 *Determinare il numero delle disposizioni di classe 2 e di ordine 5.*

Esercizio 7.4 *Determinare il numero delle disposizioni di classe 4 e di ordine 8.*

Definizione 7.5 *Permutazioni.*

Teorema 7.6 *Numero delle permutazioni. (dim)*

Esercizio 7.7 *Determinare il numero delle permutazioni di 2, 3, 4, 5 oggetti.*

Definizione 7.8 *Combinazioni.*

Teorema 7.9 *Numero delle combinazioni. (dim)*

Esercizio 7.10 *Determinare il numero delle combinazioni di classe 2 e di ordine 5.*

Esercizio 7.11 *Determinare il numero delle combinazioni di classe 4 e di ordine 8.*

Proposizione 7.12 *Proprietà dei coefficienti binomiali. (dim)*

Teorema 7.13 *Formula del binomio di Newton. (dim)*

Proposizione 7.14 *Triangolo di Tartaglia (o detto di Pascal).*

Esercizio 7.15 *Calcolare $(a + b)^5$*

Esercizio 7.16 *Calcolare $(a - b)^7$*

Esercizio 7.17 *Determinare il numero delle diagonali di un poligono di n lati.*

8 MATRICI E DETERMINANTI

Introduzione.

Definizione 8.1 *Matrice.*

Definizione 8.2 *Ordine di una matrice. Matrice quadrata. Matrice rettangolare.*

Operazioni tra matrici.

Definizione 8.3 *Determinante.*

Proposizione 8.4 *Sviluppo di un determinante del secondo ordine.*

Proposizione 8.5 *Sviluppo di un determinante del terzo ordine (regola di Sarrus).*

Principali proprietà di un determinante.

Definizione 8.6 *Complemento algebrico.*

Teorema 8.7 *Primo Teorema di Laplace.*

Teorema 8.8 *Secondo Teorema di Laplace. (dim)*

Ulteriori proprietà di un determinante.

Definizione 8.9 *Matrice inversa.*

Definizione 8.10 *Matrice trasposta.*

Definizione 8.11 *Matrice aggiunta.*

Teorema 8.12 *Teorema della matrice inversa. (dim)*

Esercizio 8.13 *Calcolare il determinante delle seguenti matrici* $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 3 \\ -1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$,

$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \\ 3 & -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Esercizio 8.14 *Determinare la matrice inversa A^{-1} delle seguente matrice $A = \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$.*

Verificare che $A^{-1}A = I$ e $AA^{-1} = I$

Esercizio 8.15 *Determinare la matrice inversa A^{-1} delle seguente matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.*

Verificare che $A^{-1}A = I$ e $AA^{-1} = I$

9 SISTEMI LINEARI

Introduzione.

Definizione 9.1 *Sistema lineare.*

Definizione 9.2 *Coefficienti. Termini noti.*

Definizione 9.3 *Matrice del sistema. Matrice completa.*

Definizione 9.4 *Soluzione del sistema.*

Definizione 9.5 *Sistema compatibile. Sistema incompatibile.*

Teorema 9.6 *Regola di Cramer. (dim)*

Esercizio 9.7 *Risolvere il seguente sistema $x - 2y + 3z = 1$, $2x + y - 4z = 2$, $-3x + 4y + z = 2$.*

Esercizio 9.8 *Risolvere il seguente sistema $2x + 3y + 4z = 5$, $x + y + z = 2$, $4x - 5y + 2z = 3$.*

Definizione 9.9 *Minore di una matrice.*

Definizione 9.10 *Caratteristica o rango di una matrice.*

Teorema 9.11 *Teorema di Rouché-Capelli.*

Esercizio 9.12 *Risolvere il seguente sistema $3x - 3y - z = 1$, $4x - 5y + 2z = 2$.*

Esercizio 9.13 *Risolvere il seguente sistema $3x - 3y - z = 1$, $2x - z = 1$, $4x - 5y + 2z = 2$.*

Esercizio 9.14 *Risolvere il seguente sistema $2x - y + 3z + t = 0$, $4x - 2y + 2z + 3t = 1$.*

Esercizio 9.15 *Risolvere il seguente sistema $2x - y + z - 3t = 0$, $x + y + 2z - 2t = 3$, $-x + 2y + z + t = 1$.*

Esercizio 9.16 *Risolvere il seguente sistema $2x - y = 3$, $3x + 5y = 1$, $-x - 6y = 2$, $5x + 4y = 4$.*

Esercizio 9.17 *Determinare per quali valori del parametro a il seguente sistema risulta compatibile e per quei valori calcolare le soluzioni $3x - 2y = 5$, $x + 5y = 13$, $-2x + y = a$.*

Esercizio 9.18 *Determinare per quali valori del parametro a il seguente sistema risulta compatibile e per quei valori calcolare le soluzioni $2x - y = 1$, $ax + 3y = 2$, $3x - 4y = a$.*

Esercizio 9.19 *Determinare per quali valori del parametro a il seguente sistema risulta compatibile e per quei valori calcolare le soluzioni $3x + ay - z = 3$, $x + 5y + 3z = -9$, $2x + y - az = a$.*

Esercizio 9.20 *Determinare per quali valori del parametro a il seguente sistema risulta compatibile e per quei valori calcolare le soluzioni $x - y + 3z = 3$, $3x - y + 2z = 8$, $2ax + 7z = 2 + a$.*

10 ELEMENTI DI CALCOLO VETTORIALE

Introduzione.

Definizione 10.1 *Spazio vettoriale.*

Definizione 10.2 *Prodotto scalare.*

Proposizione 10.3 *Proprietà del prodotto scalare. (dim)*

Proposizione 10.4 *Teorema di rappresentazione del prodotto scalare. (dim)*

Proposizione 10.5 *Ortogonalità fra vettori.*

Proposizione 10.6 *Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz.*

Proposizione 10.7 *Disuguaglianza triangolare.*

11 GEOMETRIA ANALITICA

Introduzione.

Definizione 11.1 *Coordinate cartesiane di un punto.*

Definizione 11.2 *Distanza di due punti(dim).*

Proposizione 11.3 *Punto medio di un segmento. (dim)*

La retta.

Proposizione 11.4 *Equazione generale di una retta.(dim)*

Forme particolari dell'equazione di una retta.

Proposizione 11.5 *Equazione della retta passante per un punto e di dato coefficiente angolare.(dim)*

Proposizione 11.6 *Equazione della retta passante per due punti.(dim)*

Intersezione di due rette.

Condizioni di parallelismo e di perpendicolarità di due rette.

Proposizione 11.7 *Equazione della retta passante per un punto e parallela ad una retta data.(dim)*

Proposizione 11.8 *Equazione della retta passante per un punto e perpendicolare ad una retta data.(dim)*

Definizione 11.9 *Fascio di rette.*

Trasformazioni delle coordinate.

Definizione 11.10 *Traslazione degli assi.*

Definizione 11.11 *Rotazione degli assi.*

Le coniche.

Definizione 11.12 *Circonferenza.*

Proposizione 11.13 *Equazione della circonferenza. (dim)*

Definizione 11.14 *Ellisse.*

Proposizione 11.15 *Equazione dell'ellisse. (dim)*

Definizione 11.16 *Iperbole.*

Proposizione 11.17 *Equazione dell'iperbole. (dim)*

Definizione 11.18 *Parabola.*

Proposizione 11.19 *Equazione della parabola. (dim)*

Intersezioni retta e conica.

Retta tangente ad una conica.

Le coniche come sezioni piane del cono.

Equazione generale delle coniche e loro classificazione.

Esercizio 11.20 *Dato il fascio di rette individuato da $4x + y - 3 = 0$ e da $2x + y - 7 = 0$ determinare*

- 1) *la retta t del fascio perpendicolare alla retta r di equazione $2x + 3y + 10 = 0$;*
- 2) *Il punto d'intersezione di r e di t ;*
- 3) *la retta del fascio parallela alla retta r .*

Esercizio 11.21 *Data la funzione $y = |x^2 + 4x| - (x^2 + 2x)$ determinarne il grafico e le tangenti negli eventuali punti angolosi.*

Esercizio 11.22 *Presa la retta di equazione $y = mx + 4$, determinare m in modo che la retta risulti tangente al cerchio $x^2 + y^2 - 4x - 5 = 0$.*

Esercizio 11.23 *Presa la retta di equazione $y = x + p$, determinare p in modo che la retta risulti tangente all'ellisse $4x^2 + y^2 = 16$.*

Esercizio 11.24 *Determinare le rette tangenti all'iperbole $x^2 - 4y^2 = 16$ uscenti dal punto $(2, 0)$.*

Esercizio 11.25 *Classificare le seguenti coniche*

$$x^2 + 5y^2 + 3x - 1 = 0$$

$$2x^2 + y^2 + 3x - 4y - 1 = 0$$

$$x^2 - 3y^2 + 3x + 2y - 1 = 0$$

$$x^2 + 4y^2 + 4xy + 3x + 2y + 3 = 0$$