CALCOLO DELLE PROBABILITÀ 2 (Laurea Specialistica)
28 giugno 2006

Motivare *dettagliatamente* le risposte su fogli allegati

1.- Sia X un numero aleatorio a valori $\{-\alpha, 0, \alpha\}$, con $\alpha > 0$ e

$$P(X = \alpha) = P(X = -\alpha) = \frac{1}{5}\,.$$

Posto $M = \mathbb{P}(X)\,, \sigma^2 = var(X)$, si consideri la disuguaglianza di Cebicev nella forma, per ogni $\gamma > 0$,

$$P\Big(|X - M| \geq \gamma\Big) \leq \frac{\sigma^2}{\gamma^2}\,.$$

Stabilire se esistono valori di γ tali che la disuguaglianza sia verificata come uguaglianza.

2.- Un'urna contiene inizialmente solo una pallina bianca. Si effettuano delle estrazioni con le seguenti modalità: dopo ogni estrazione di una pallina e prima della successiva si rimette nell'urna la pallina estratta e se ne aggiunge una nera. Posto

$$E_n = \{\textit{pallina bianca alla } n\textit{–esima estrazione}\}\,,$$

calcolare $P(E_n)$ e considerare i numeri aleatori $X_n = |E_n| + \ldots + |E_n|$ (n volte). Dimostrare che $\{X_n\}$ converge in legge ad un numero aleatorio X con distribuzione di ... (*Suggerimento*: funzioni caratteristiche ... o anche funzioni generatrici, perchè, dato un numero aleatorio U, ponendo

$$V = \frac{1}{it}\,\log_e(t^U)$$

si ha $g_U(t) = \varphi_V(t)$ ...!)

3.- Dati due processi di Poisson di parametri rispettivi λ_1, λ_2, e supponendo che i rispettivi tempi di attesa T_1, T_2 fra due arrivi siano indipendenti, calcolare la probabilità dell'evento $(T_1 < T_2)$. Per quali valori di λ_1, λ_2 tale probabilità coincide con quella dell'evento $(T_1 \geq T_2)$?

SOLUZIONI (28 giugno 2006)

1. Si ha $M = 0$ e $\sigma^2 = \frac{2}{5}\alpha^2$, e quindi la disuguaglianza di Cebicev diventa

$$P\Big(|X| \geq \gamma\Big) \leq \frac{\frac{2}{5}\alpha^2}{\gamma^2}\,.$$

D'altra parte la probabilità a primo membro vale 0 se $\gamma > \alpha$, e vale $\frac{2}{5}$ se $\gamma \leq \alpha$ (essendo $\gamma > 0$). Quindi l'uguaglianza vale per $\gamma = \alpha$.

2. Si ha $P(E_n) = \frac{1}{n}$. La funzione generatrice di $X_n = n\,|E_n|$ è, per $|t| < 1$,

$$\mathbb{P}(t^{n\,|E_n|}) = \frac{1}{n}\,t^n + (1 - \frac{1}{n}) \cdot 1 = 1 + \frac{t^n - 1}{n} \longrightarrow 1\,,$$

e quindi per il numero aleatorio "limite" X si ha $g_X(t) = 1$, che è la funzione generatrice della distribuzione di probabilità $P(X = 0) = 1$ (numero aleatorio costante, uguale a zero)

3. vedi libro (R.Scozzafava - Incertezza e Probabilità - Zanichelli 2001), Esercizio 89 p.182 (Soluz. a p. 206)

CALCOLO DELLE PROBABILITÀ 2 (Laurea Specialistica)
15 luglio 2006

Motivare *dettagliatamente* le risposte su fogli allegati

1.- Sia $\{X_n\}$ una successione di numeri aleatori indipendenti con distribuzione uniforme in $[0,1]$, e sia, per ogni $n \in \mathbb{N}$,

$$Z_n = \min(X_1, X_2, \ldots, X_n)\,.$$

Studiare, mediante le funzioni di ripartizione, l'eventuale convergenza in legge di $\{Y_n\}$, con $Y_n = n\,Z_n$, ad un numero aleatorio Y.

2.- Calcolare la previsione del numero aleatorio $U = X \cdot Y$, essendo X l'indicatore di un evento con

$$P(X=0) = \frac{1}{3} \quad , \quad P(X=1) = \frac{2}{3}\ ,$$

ed Y un numero aleatorio con distribuzione esponenziale, con X, Y indipendenti.

3.- Si consideri un processo uniforme su $[0,1]$. Se $n = 6$, calcolare la probabilità α che 2 punti appartengano all'intervallo $(0, \frac{1}{2})$ e 4 all'intervallo $(\frac{3}{4}, 1)$. Indicando poi con X il numero di punti in $(0, \frac{1}{5})$, calcolare la previsione di X e la probabilità β dell'evento $(X = 0)$.

SOLUZIONI (15 luglio 2006)

1. Per l'indipendenza, la funzione di ripartizione del minimo (più precisamente, di n volte il minimo) è, per $0 \leq y \leq 1$,

$$F_n(y) = P(Y_n \leq y) = P(Z_n \leq \frac{y}{n}) = 1 - P(Z_n > \frac{y}{n}) =$$
$$= 1 - \prod_{i=1}^{n} P(X_i > \frac{y}{n}) = 1 - \Big(1 - \frac{y}{n}\Big)^n \longrightarrow 1 - e^{-y}\,.$$

Quindi Y ha distribuzione esponenziale di parametro $\lambda = 1$.

2. È analogo ad un Esercizio degli Appunti. Ma qui non occorre l'integrale di Riemann–Stieltjes perchè, grazie all'indipendenza, si ha subito

$$\mathbb{P}(U) = \mathbb{P}(X) \cdot \mathbb{P}(Y) = \frac{2}{3}\,\frac{1}{\lambda}\,.$$

3. Distribuzione multinomiale, quindi

$$\alpha = \frac{6!}{2!0!4!}\Big(\frac{1}{2}\Big)^2\Big(\frac{1}{4}\Big)^0\Big(\frac{1}{4}\Big)^4 = \frac{15}{1024} = 0.0146\ .$$

Se X è il numero di "successi", cioè di punti che cadono in $(0, \frac{1}{5})$, si ha (binomiale!)

$$\mathbb{P}(X) = n\,p = \frac{6}{5}$$

e infine

$$\beta = \Big(\frac{4}{5}\Big)^6 = 0.262\,.$$

CALCOLO DELLE PROBABILITA' 2
(Laurea Specialistica - 23 settembre 2006)

Motivare *dettagliatamente* le risposte su fogli allegati

1. Dato un alfabeto
$$E = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5\}$$
con distribuzione di probabilità
$$P = \{0.40, 0.30, 0.15, 0.10, 0.05\}$$
e con codifica binaria (nell'ordine)
$$c = \{00, 01, 111, 10, 110\}\,,$$
verificare se tale codice soddisfa le condizioni di applicabilità del teorema di Huffman.

   In caso affermativo, determinare – mediante la procedura di Huffman – un codice c_o con lunghezza media $L(c_o) < L(c)$.

2. Data una successione di numeri aleatori discreti X_k, indipendenti e con la stessa distribuzione, sia g la funzione generatrice di X_1, con $g'(1) = 0$.

   Studiare l'eventuale convergenza *in probabilità* della successione
$$Y_n = \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n}$$
ad un numero aleatorio X.

3. Si consideri un processo di branching relativo a X_n individui, con ogni individuo j che può dare origine, nel corso della propria vita, con probabilità p $(0 < p < 1)$, ad un solo discendente, cioè
$$X_{n+1} = \begin{cases} \sum_{j=1}^{X_n} Z_n^{(j)}\,, & X_n \geq 1 \\ 0\,, & X_n = 0\,, \end{cases}$$
dove le $Z_n^{(j)} = Z$ $(j > 0, n \geq 0)$ sono *indicatori* di eventi indipendenti e equiprobabili. Determinare previsione m_n e varianza v_n del processo X_n. Verificare che esse coincidono con quelle di un evento di probabilità α (funzione di p).

SOLUZIONI (23 settembre 2006)

1. Con semplice calcolo, si trova che $L(c) = 2.20$. Come codice c_o si può prendere, dopo aver applicato la procedura di Huffman,

$$c_o = \{1, 01, 001, 0001, 0000\}$$

e si ha $L(c_o) = 2.05$.

2. La successione $\{Y_n\}$ converge quasi certamente, e quindi *in probabilità*, a $\mathbb{P}(X_k)$. E quindi, ricordando anche il significato di $g'(1)$, si ha $X = 0$.

3. Applicando a questo caso particolare i risultati generali stabiliti sui processi di branching, si trova facilmente che

$$m_n = p^n \quad , \quad v_n = p^n(1 - p^n) \quad , \quad \alpha = p^n \, .$$

CALCOLO DELLE PROBABILITA' 2
(Laurea Specialistica - 21 dicembre 2006)

Motivare *dettagliatamente* le risposte su fogli allegati

1. - Dato un processo di Poisson di intensità λ, determinare la distribuzione del numero di arrivi $X = N(t)$ in $(0,t)$ condizionato a $Y = N(s) = n$ (con $s > t$).

2. - Sia X un numero aleatorio con distribuzione uniforme su $[0,1]$, e sia

$$Y_n = \begin{cases} n\,, & 0 \leq X \leq \frac{1}{n} \\ 0\,, & \frac{1}{n} < X \leq 1\,. \end{cases}$$

Dimostrare che la successione $\{Y_n\}$ converge in probabilità a 0.

3. - Dato un filtro lineare invariante nel tempo

$$y(t) = \int_a^b h(s)\, x(t-s)\, ds\;,$$

con h nulla fuori di $[a,b]$, dimostrare che, per ogni $\omega \in \mathbb{R}$, un input del tipo

$$x(t) = A\, e^{i\omega t}\;,$$

con $x(0) = A = 1$, produce un output dello stesso tipo, con

$$y(t) = A(\omega)\, e^{i\omega t}\;.$$

Determinare l'espressione esplicita della funzione $A(\omega)$ e darne una interpretazione nel caso particolare che la funzione h sia la densità di probabilità di un numero aleatorio H.

SOLUZIONI (21 dicembre 2006)

1. Si ha

$$X|(Y=n) \quad \sim \binom{n}{x}\left(\frac{t}{s}\right)^x \left(1-\frac{t}{s}\right)^{n-x}$$

2. Bisogna calcolare

$$P(Y_n \geq \varepsilon) = P(Y_n = n)\,,$$

e siccome X ha distribuzione uniforme su $[0,1]$, si ha

$$P(Y_n = n) = \frac{1}{n} \longrightarrow 0\,.$$

3. Con facile calcolo

$$A(\omega) = \int_a^b h(s)\,e^{-i\,\omega\,s}\,ds = \varphi_H(\omega)$$

(funzione caratteristica del n.a. H).

In generale, se h non è una densità, $A(\omega)$ è la trasformata di Fourier di h.

CALCOLO DELLE PROBABILITÀ 2 (Laurea Specialistica)
28 giugno 2007

Motivare *dettagliatamente* le risposte su fogli allegati

1. - Sia X_n una successione di numeri aleatori indipendenti con distribuzione uniforme su $[0,1]$, e sia, per ogni $n \in \mathbb{N}$,

$$Z_n = max\{X_1, \ldots, X_n\}.$$

Studiare l'eventuale convergenza in legge di Z_n ad un numero aleatorio Z.

2. - Si consideri un processo di branching relativo a X_n individui, con ogni individuo j che **può** dare origine, nel corso della propria vita, con probabilità p $(0 < p < 1)$, ad un solo discendente, cioè

$$X_{n+1} = \begin{cases} \displaystyle\sum_{j=1}^{X_n} Z_n^{(j)} \ , & X_n \geq 1 \\ 0 \ , & X_n = 0 \ , \end{cases}$$

con le $Z_n^{(j)} = Z$ $(j > 0, n \geq 0)$ *indicatori* di eventi indipendenti e equiprobabili.

Calcolare la probabilità p_e di estinzione del processo, ricordando che, detta $g_Z(t)$ la funzione generatrice di Z, si ha

$$t = g_Z(t) \ ,$$

con $t = p_e$.

3. - Dati tre filtri lineari, definiti dalle relazioni

$$y_1(t) = x_1(t - \tau) \quad , \quad y_2(t) = x_2'(t) \quad , \quad y_3(t) = x_3(t) - x_3(t-1) \ ,$$

verificare che, per ogni $\omega \in \mathbb{R}$, un input del tipo $x_k(t) = e^{i\,\omega\,t}$ $(k = 1, 2, 3)$ produce, in tutti e tre i casi, un output del tipo

$$y_k(t) = A_k(\omega)\, e^{i\,\omega\,t} \quad , \quad k = 1, 2, 3 \ .$$

Determinare le espressioni esplicite di $A_k(\omega)$, $(k = 1, 2, 3)$.

4.- È noto che eventi scambiabili sono equiprobabili (ma, in generale, non vale il viceversa). Tenendo presente che, se E, H sono due eventi qualunque, si può scrivere

$$P(H) = P(E \wedge H) + P(E^c \wedge H) \ ,$$

dimostrare che <u>due</u> eventi A, B equiprobabili sono scambiabili.

SOLUZIONI (28 giugno 2007)

1. Per l'indipendenza, la funzione di ripartizione del massimo è, per $0 \leq z < 1$,

$$F_n(z) = P(Z_n \leq z) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i \leq z) = z^n \longrightarrow 0$$

e quindi il limite $F(z)$ della successione $\{F_n(z)\}$ vale 0 (non solo per $z \leq 0$, ma anche) per $0 \leq z < 1$ (e vale 1, come ogni $F_n(z)$, per $z \geq 1$).

Pertanto $Z = 1$, n.a. costante (cioè $P(Z = 1) = 1$).

2. Si ha $g_Z(t) = p\,t + q$, con $q = 1 - p$, e quindi l'equazione da risolvere è

$$t = p\,t + q\,,$$

cioè $t = p_e = 1$.

3. Con facili calcoli

$$A_1(\omega) = e^{-i\,\omega\,\tau} \quad , \quad A_2(\omega) = i\,\omega \quad , \quad A_3(\omega) = 1 - e^{-i\,\omega}\,.$$

4. Essendo

$$P(A) = P(B \wedge A) + P(B^c \wedge A)\ ,$$
$$P(B) = P(A \wedge B) + P(A^c \wedge B)\ ,$$

da $P(A) = P(B)$ e dalla proprietà commutativa dell'intersezione segue

$$P(A^c \wedge B) = P(B^c \wedge A)\ .$$

CALCOLO DELLE PROBABILITÀ 2 (Laurea Specialistica)
14 luglio 2007

Motivare *dettagliatamente* le risposte su fogli allegati

1. - Sia X_n una successione di numeri aleatori indipendenti con distribuzione uniforme su $[0,1]$, e sia, per ogni $n \in \mathbb{N}$,

$$Z_n = max\{X_1, \ldots, X_n\}.$$

Studiare l'eventuale convergenza in probabilità di Z_n ad un numero aleatorio Z.

2. - Dato, per $n \in \mathbb{N}$, un processo uniforme $X_1 \ldots X_n$ sull'intervallo $[0,1]$, si consideri la prima statistica d'ordine $X_{(1)}$. Calcolare la previsione $\mathbb{P}(X_{(1)}^2)$.

3. - Tenendo presente che, se X_n è una successione di numeri aleatori indipendenti con distribuzione uniforme su $[0,1]$, la successione

$$Y_n = min\{X_1, \ldots, X_n\}$$

converge in probabilità a zero, verificare in modo *diretto*, utilizzando il risultato del n.2, che Y_n converge in media quadratica al numero aleatorio $Y = ?$

4. - Dato un processo di Poisson di intensità $\lambda = 4$, e detti X e Y, rispettivamente, il numero di arrivi negli intervalli di tempo $[0,2]$ e $(2,3]$, calcolare la probabilità dell'evento condizionato $E|H$, con $E = \{X = 3\}$, $H = \{X + Y = 5\}$.

SOLUZIONI (14 luglio 2007)

1. Poichè $0 \leq Z_n \leq 1$, si ha, per l'indipendenza,

$$P(|Z_n - 1| \geq \varepsilon) = P(1 - Z_n \geq \varepsilon) = P(Z_n \leq 1 - \varepsilon) = (1 - \varepsilon)^n \longrightarrow 0 \ ,$$

e quindi $Z = 1$.

2. Si ha, utilizzando la densità della prima statistica d'ordine,

$$\mathbb{P}(X^2_{(1)}) = \int_0^1 x^2 \, n \, (1 - x)^{n-1} \, dx \ ,$$

da cui, con successive integrazioni per parti,

$$\mathbb{P}(X^2_{(1)}) = \frac{2}{(n+1)(n+2)} \ .$$

3. Siccome la convergenza in media quadratica implica quella in probabilità, allora la successione $\{Y_n\}$ o non converge in media quadratica o, se converge, il suo limite deve essere necessariamente $Y = 0$. Verifichiamo allora se $\{Y_n\}$ converge in media quadratica a zero.

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|Y_n - 0|^2) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X^2_{(1)}) = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{(n+1)(n+2)} = 0 \, .$$

4. Si può risolvere in due modi, o calcolando direttamente il numero di arrivi con la distribuzione di Poisson, oppure tenendo presente la relazione fra un processo di Poisson condizionato al numero di arrivi in un intervallo $[0, c]$ ed un processo uniforme su $[0, c]$. Quindi

$$P(E|H) = \frac{P(X + 3, X + Y = 5)}{P(X + Y = 5)} = \frac{\frac{e^{-8}\, 8^3}{3!} \, \frac{e^{-4}\, 4^2}{2!}}{\frac{e^{-12}\, 12^5}{5!}} = \binom{5}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^3 \left(1 - \frac{2}{3}\right)^{5-3} = \frac{80}{243} \ .$$

CALCOLO DELLE PROBABILITÀ 2 (Laurea Specialistica)
15 settembre 2007

Motivare *dettagliatamente* le risposte su fogli allegati

1. - Dato un processo di Poisson di intensità λ, e detto X_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ il tempo d'attesa fra il $(k-1)$-esimo ed il k-esimo arrivo, calcolare la densità di probabilità del numero aleatorio

$$V = max\{X_1, \ldots, X_n\}\,.$$

2. - Sia X un numero aleatorio con distribuzione esponenziale (di parametro α), e sia

$$Y_n = \begin{cases} n\,, & 0 \leq X \leq \frac{1}{n} \\ 0\,, & X > \frac{1}{n}\,. \end{cases}$$

Dimostrare che la successione $\{Y_n\}$ converge in probabilità a 0.

3. - Calcolare la varianza di un numero aleatorio X con distribuzione geometrica (di parametro p) utilizzando la funzione generatrice.

4. - Sia X_n una successione di numeri aleatori indipendenti con densità

$$f(x) = \begin{cases} 2\,N(x)\,, & x < 0 \\ 0\,, & x \geq 0\,. \end{cases}\,,$$

dove $N(x)$ è la densità della distribuzione normale standard, e sia, per ogni $n \in \mathbb{N}$,

$$Z_n = max\{X_1, \ldots, X_n\}.$$

Studiare l'eventuale convergenza in legge di Z_n ad un numero aleatorio Z.

SOLUZIONI (15 settembre 2007)

1. Poichè i tempi d'attesa hanno distribuzione esponenziale e sono indipendenti, si ha, per $v \geq 0$,

$$F_V(v) = P(V \leq v) = \prod_{k=1}^{n} P(X_k \leq v) = (1 - e^{-\lambda v})^n$$

e quindi

$$f_V(v) = \lambda\, n\, e^{-\lambda v}(1 - e^{-\lambda v})^{n-1} \qquad (v \geq 0)\,.$$

2. Bisogna calcolare

$$P(Y_n \geq \varepsilon) = P(Y_n = n)\,,$$

e siccome X ha distribuzione esponenziale, si ha

$$P(Y_n = n) = P(0 \leq X \leq \frac{1}{n}) = 1 - e^{-\frac{\alpha}{n}} \longrightarrow 0\,.$$

3. Si ha

$$g_X(t) = \mathbb{P}(t^X) = \sum_{k=1}^{\infty} t^k\, q^{k-1}\, p = \frac{p}{q}\,\frac{qt}{1-qt}\,,$$

$$g'_X(t) = \frac{p}{(1-qt)^2}\quad,\quad g''_X(t) = \frac{2pq}{(1-qt)^3}\,,$$

e quindi

$$var(X) = g''_X(1) + g'_X(1) - [g'_X(1)]^2 = \frac{q}{p^2}\,.$$

4. Per l'indipendenza, la funzione di ripartizione del massimo è, per $z < 0$,

$$F_n(z) = P(Z_n \leq z) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i \leq z) = [2\,\Phi(z)]^n \longrightarrow 0$$

(essendo $\Phi(z) < \frac{1}{2}$ per $z < 0$), mentre $F_n(z) = 1$ per $z > 0$, e quindi il limite $F(z)$ della successione $\{F_n(z)\}$ vale 0 per $z < 0$ e vale 1 per $z \geq 0$.

Pertanto $Z = 0$, n.a. costante (cioè $P(Z = 0) = 1$).

CALCOLO DELLE PROBABILITÀ 2 (Laurea Specialistica)
21 dicembre 2007

Motivare *dettagliatamente* le risposte su fogli allegati

1. - Un'urna contiene tre palline numerate 1, 3, 5, una seconda urna contiene due palline numerate 0, 1. Da ciascuna urna si estrae una pallina, e sia $X = U_1 + U_2$ la somma dei due numeri estratti. Utilizzando la funzione generatrice del numero aleatorio X, calcolare la probabilità dell'evento $\{X = 3\}$.

2. - Sia X_n una successione di numeri aleatori indipendenti, tutti con distribuzione esponenziale di parametro λ, e sia, per ogni $n \in \mathbb{N}$,

$$Y_n = min\{X_1, \ldots, X_n\}.$$

Studiare l'eventuale convergenza in legge di Y_n ad un numero aleatorio Y.

3. - Dato un processo di Poisson di intensità λ, e detto T_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ il tempo d'attesa fra il $(k-1)$-esimo ed il k-esimo arrivo, calcolare la densità di probabilità del numero aleatorio

$$U = min\{T_1, \ldots, T_n\}\,.$$

4. - Dato un alfabeto

$$E = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6\}$$

con distribuzione di probabilità

$$P = \{0.30, 0.20, 0.15, 0.15, 0.10, 0.10\}$$

e con codifica binaria (nell'ordine)

$$c = \{00, 010, 101, 110, 111, 100\}\,,$$

determinare, mediante la procedura di Huffman, un altro codice c_o con lunghezza media $L(c_o) < L(c)$.

SOLUZIONI (21 dicembre 2007)

1. I numeri aleatori U_1 e U_2 sono evidentemente indipendenti. Quindi

$$g_X(t) = g_{U_1+U_2}(t) = g_{U_1}(t) \cdot g_{U_2}(t) = \mathbb{P}(t^{U_1})\,\mathbb{P}(t^{U_2}) =$$

$$= \Big(\sum_{u=1,3,5} \frac{1}{3}\, t^n \Big) \Big(\sum_{u=0,1} \frac{1}{2}\, t^n \Big) = \frac{1}{6}\, (t + t^2 + t^3 + t^4 + t^5 + t^6)\,.$$

Ne segue

$$P(X = 3) = \frac{1}{6} \;\; (= P(X = x)\,,\; x = 1, \dots, 6)\;.$$

2. Per l'indipendenza, la funzione di ripartizione del minimo è, per $y \geq 0$,

$$F_n(y) = P(Y_n \leq y) = 1 - P(Y_n > y) = 1 - \prod_{i=1}^{n} P(X_i > y) = 1 - (e^{-\lambda\, y})^n = 1 - e^{-\lambda\, y\, n} \longrightarrow 1$$

e quindi il limite $F(y)$ della successione $\{F_n(y)\}$ vale 0 (come ogni $F_n(y)$) per $y < 0$, e vale 1 per $y \geq 0$.

Pertanto $Y = 0$, n.a. costante (cioè $P(Y = 0) = 1$).

3. . Poichè i tempi d'attesa hanno distribuzione esponenziale e sono indipendenti, si ha, per $u \geq 0$,

$$F_U(u) = P(U \leq u) = 1 - P(U > u) = 1 - \prod_{k=1}^{n} P(T_k > u) = 1 - (e^{-\lambda\, u})^n = 1 - e^{-\lambda\, u\, n}$$

e quindi

$$f_U(u) = \lambda\, n\, e^{-\lambda\, n\, u} \qquad (u \geq 0)\;.$$

4. Con semplice calcolo, si trova che $L(c) = 2.7$. Come codice c_o si può prendere, dopo aver applicato la procedura di Huffman,

$$c_o = \{00, 01, 100, 101, 111, 110\}$$

e si ha $L(c_o) = 2.5\,$.

CALCOLO DELLE PROBABILITÀ 2 (Laurea Specialistica)
11 aprile 2008

Motivare *dettagliatamente* le risposte su fogli allegati

1. - Sia X_n una successione di numeri aleatori indipendenti, tutti con distribuzione esponenziale di parametro λ, e sia, per ogni $n \in \mathbb{N}$,

$$Z_n = max\{X_1, \ldots, X_n\}.$$

Verificare che Z_n non converge in legge ad alcun numero aleatorio Z.

2. - Calcolare la previsione di un numero aleatorio X con distribuzione binomiale (di parametri n e p) utilizzando la funzione generatrice.

3. - Contrassegnare con V (vero) o F (falso) le seguenti affermazioni:

– Le lacune di un processo uniforme hanno distribuzione uniforme

– In un processo di Poisson, il numero di arrivi in $(0, t)$ ha distribuzione di Poisson

– Le lacune di un processo uniforme non hanno la stessa varianza

– In un processo di Poisson i tempi di attesa fra due arrivi hanno distribuzione uniforme

4. - Sia X_n una successione di numeri aleatori indipendenti, tutti con distribuzione esponenziale di parametro λ, e sia, per ogni $n \in \mathbb{N}$,

$$Y_n = min\{X_1, \ldots, X_n\}.$$

Studiare l'eventuale convergenza in probabilità di Y_n ad un numero aleatorio Y.

SOLUZIONI (11 aprile 2008)

1. Poichè i numeri aleatori X_n hanno distribuzione esponenziale e sono indipendenti, si ha $F_n(z) = P(Z_n \leq z) = 0$ per $z < 0$ e, per $z \geq 0$,

$$F_n(z) = \prod_{k=1}^{n} P(X_k \leq z) = \prod_{k=1}^{n} (1 - e^{-\lambda z}) = (1 - e^{-\lambda z})^n$$

e quindi

$$F_n(z) \longrightarrow 0 \text{ per ogni } z \in \mathbb{R}\,.$$

Ma la funzione identicamente nulla $F(z) = 0$ <u>non</u> è una funzione di ripartizione.

2. Si ha

$$g_X(t) = \mathbb{P}(t^X) = \sum_{x=0}^{n} t^x \binom{n}{x} p^x q^{n-x} = \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} (p\,t)^x q^{n-x} = (p\,t + q)^n\,,$$

e quindi

$$g'_X(t) = n\,(p\,t + q)^{n-1} p\,,$$

da cui $g'_X(1) = n\,p\,.$

3. FALSO, VERO, FALSO, FALSO: cfr. libro (R.Scozzafava - Incertezza e Probabilità - Zanichelli), cap. 4, pp. 153–157.

4. Per ogni $\varepsilon > 0$ si ha

$$P(Y_n \geq \varepsilon) = P(\min\{X_1, \ldots, X_n\} \geq \varepsilon) = P(X_1 \geq \varepsilon, \ldots, X_n \geq \varepsilon) = \prod_{k=1}^{n} P(X_k \geq \varepsilon) =$$

$$= \prod_{k=1}^{n} e^{-\lambda \varepsilon} = e^{-\lambda \varepsilon n} = P(|Y_n - 0| \geq \varepsilon) \longrightarrow 0\,,$$

e quindi si ha $Y \equiv 0$ (detto altrimenti, $P(Y = 0) = 1$, cioè 0 è l'unico valore possibile, con probabilità 1).

CALCOLO DELLE PROBABILITÀ 2 (Laurea Specialistica)
27 giugno 2008

Motivare *dettagliatamente* le risposte su fogli allegati
Anche questo foglio va riconsegnato (con NOME e COGNOME, a fondo pagina)

1\. - Sia (X, Y) un punto scelto "a caso" fra i vertici del quadrato unitario $[0,1] \times [0,1]$. Determinare la funzione generatrice $g(s,t)$ del vettore aleatorio (X, Y), ed utilizzare il risultato per determinare previsione e varianza di X e di Y, e la loro covarianza.

2\. - Dato un alfabeto
$$E = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$$
con distribuzione di probabilità
$$P = \{0.40, 0.35, 0.25\}$$
e con codifica binaria (nell'ordine)
$$c = \{00, 11, 01\}\,,$$
verificare se tale codice soddisfa le condizioni di applicabilità del teorema di Huffman. In caso affermativo, determinare – mediante la procedura di Huffman – un codice c_o con lunghezza media $L(c_o) < L(c)$, verificando anche che esso soddisfa le conclusioni del teorema. Calcolare poi l'entropia $H(X)$ del numero aleatorio associato ad E, e commentare il risultato.

3\. - Un vettore aleatorio gaussiano $X_{m,\sigma} = (X_1, X_2, X_3)$ ha vettore previsione e matrice di covarianza, rispettivamente,
$$m = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad , \quad C_n^\sigma = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

– Determinare un valore di c tale che i numeri aleatori X_1 e $X_2 - cX_1$ siano stocasticamente indipendenti;
– Determinare la distribuzione congiunta del vettore $Y = (X_1, X_3)$;
– Determinare la distribuzione del numero aleatorio $U = X_1 - 2X_2 + 3X_3$.

NOME E COGNOME:

SOLUZIONI (27 giugno 2008)

1. Si ha

$$g(s,t) = \mathbb{P}(s^X\, t^Y) = \frac{1}{4}\,(s^0\,t^0 + s^0\,t^1 + s^1\,t^0 + s^1\,t^1) = \frac{1}{4}\,(1 + t + s + st)\ ,$$

$$\mathbb{P}(X\,Y) = 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4}\ ,$$

$$g_X(s) = \frac{1}{4}\,(1+1+s+s) = \frac{1}{2}\,(1+s)\quad ,\quad g'_X(s) = \frac{1}{2} = g'_X(1) = \mathbb{P}(X) = \mathbb{P}(Y)\ ,$$

e quindi $cov(X,Y) = 0$. Si ha poi $g''_X(s) = 0$, e quindi

$$var(X) = var(Y) = 0 + \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\ .$$

2. Si tratta di un codice diretto, inoltre c non verifica la proprietà $(\mathcal{P}_1)$ e verifica la $(\mathcal{P}_2)$. Si ha $L(c) = 2$. Con la procedura di Huffman si determina un codice c_o che verifica entrambe le proprietà $(\mathcal{P}_1)$ e $(\mathcal{P}_2)$, con $L(c_o) = 1.60$ (per esempio $c_o = \{0, 10, 11\}$). Si ha poi $H(X) = 1.56$, e quindi c_o richiede (in media) meno di una cifra binaria in più del numero di bits dati dall'entropia.

3. Siccome i numeri aleatori X_1 e $X_2 - cX_1$ sono ovviamente gaussiani, la loro indipendenza equivale a $cov(X_1, X_2 - cX_1) = 0$. Con semplici calcoli si trova che

$$cov(X_1, X_2 - cX_1) = cov(X_1, X_2) - c\,var(X_1)\ ,$$

e quindi

$$c = \frac{cov(X_1, X_2)}{var(X_1)} = \frac{1}{4}\ .$$

Anche il vettore Y è (come è noto) gaussiano, ed il vettore previsione si ottiene prendendo prima e terza riga del vettore m, mentre la matrice di covarianza si ottiene da C_n^σ eliminando seconda riga e seconda colonna.

Anche il numero aleatorio U è gaussiano, e media e varianza si trovano facilmente (con qualche calcolo elementare), e sono uguali, rispettivamente, a $\mathbb{P}(U) = 5$, $var(U) = 43$.

CALCOLO DELLE PROBABILITÀ 2 (Laurea Specialistica)
18 luglio 2008

Motivare *dettagliatamente* le risposte su fogli allegati
Anche questo foglio va riconsegnato (con NOME e COGNOME, a fondo pagina)

1. - In un processo di Poisson di intensità α, il numero totale di arrivi nell'intervallo $[0, 1]$ è uguale a n, con $n > 2$. Fissato $t \in [0, 1]$, calcolare
– la probabilità p che tutti gli arrivi si verifichino prima dell'istante t
– la densità di probabilità $\tau(t)$ del tempo di attesa fra il secondo e il terzo arrivo.

2. - Si consideri un processo di branching relativo a X_n individui, con ogni individuo j che può dare origine, nel corso della propria vita, ad un numero $Z_n^{(j)} = Z$ di discendenti compreso fra 0 e 2, con distribuzione binomiale

$$P(Z = k) = \binom{2}{k} p^k q^{2-k} ,$$

dove $p = q = \frac{1}{2}$. Calcolare la probabilità p_e di estinzione del processo.

3. - Sia X_n una successione di numeri aleatori indipendenti, tutti con distribuzione geometrica di parametro p, e sia, per ogni $n \in \mathbb{N}$,

$$Y_n = min\{X_1, \ldots, X_n\}.$$

– Studiare l'eventuale convergenza in probabilità di Y_n al numero aleatorio $Y = 0$.
(Suggerimento: distinguere i due casi $0 < \varepsilon \leq 1$, $\varepsilon > 1$).

– Y_n converge in media quadratica a $Y = 0$?

NOME E COGNOME:

SOLUZIONI (18 luglio 2008)

1. - Si ha $p = \binom{n}{n} t^{\,n} (1-t)^{\,n-n} = t^n$, e, per $0 \le t \le 1$,

$$\tau(t) = n\,(1-t)^{\,n-1}\ .$$

Vedi libro (R.Scozzafava - Incertezza e Probabilità - Zanichelli 2001), Esercizio 93, p.183 (Soluz. a p. 207).

2. - Si deve risolvere l'equazione

$$t = g_{_Z}(t)\ , \qquad (*)$$

con $t = p_e$ e con $g_{_Z}(t)$ funzione generatrice della distribuzione binomiale considerata, cioè

$$g_{_Z}(t) = \mathbb{P}(t^Z) = \sum_{k=0}^{2} t^k \binom{2}{k} p^{\,k}\, q^{\,2-k} \ = \left(\frac{1}{2}\right)^2 (t^0 + 2\,t^1 + t^2) = \frac{1}{4}\,(1+t)^2\ .$$

Quindi, sostituendo nella $(*)$, si vede facilmente che l'unica soluzione è $t = 1 = p_e$.

3. - Per ogni $\varepsilon > 0$ si ha

$$P(Y_n \ge \varepsilon) = P(\min\{X_1,\dots,X_n\} \ge \varepsilon) = P(X_1 \ge \varepsilon,\dots,X_n \ge \varepsilon) = \prod_{k=1}^{n} P(X_k \ge \varepsilon) =$$

$$= \begin{cases} 1^n = 1\ , & 0 < \varepsilon \le 1 \\ \displaystyle\prod_{k=1}^{n} q^{[\varepsilon]+1} = q^{([\varepsilon]+1)\,n}\ , & \varepsilon > 1\ , \end{cases}$$

essendo $q = 1 - p$, e avendo indicato con $[\varepsilon]$ la parte intera di ε. Quindi la probabilità a primo membro <u>non</u> tende (per $n \longrightarrow \infty$) a zero per ogni $\varepsilon > 0$, cioè non si ha la convergenza in probabilità di Y_n al numero aleatorio $Y = 0$.

Da questo risultato segue subito (per un noto risultato: cfr. Osservazione 7, pag. 39 Appunti) che Y_n <u>non</u> converge in media quadratica a $Y = 0$.

CALCOLO DELLE PROBABILITÀ 2 (Laurea Specialistica)
20 settembre 2008

Motivare *dettagliatamente* le risposte su fogli allegati
Anche questo foglio va riconsegnato (con NOME e COGNOME, a fondo pagina)

1. - Siano A, B, E tre eventi tali che

$$A \wedge B = \emptyset \ , \ E \subseteq B \ , \ P(A) = P(B) \ , \ P(E) = \frac{1}{3} P(B) \ .$$

Posto $F = B \wedge E^c$, stabilire se A e B sono scambiabili, e se lo sono E e F.

2. - Sia X_n una successione di numeri aleatori indipendenti, tutti con distribuzione di Poisson di parametro λ, e sia, per ogni $n \in \mathbb{N}$,

$$Y_n = min\{X_1, \ldots, X_n\}.$$

Studiare l'eventuale convergenza in probabilità e in legge di Y_n al numero aleatorio $Y = 0$.

3. - Dato un processo di Poisson di intensità λ, sia $X + Y$ il numero totale di arrivi in $[0, 7]$. Precisamente, sia X il numero di arrivi in $[0, 2]$ ed Y il numero di arrivi in $[2, 7]$. Calcolare la probabilità dell'evento condizionato

$$(X = 3) \Big| (X + Y = 6) \ .$$

Considerare lo stesso problema per un processo di Poisson di intensità $\mu \neq \lambda$.

NOME E COGNOME:

SOLUZIONI (20 settembre 2008)

1. - Condizione necessaria per la scambiabilità è la equiprobabilità. Nel caso di due eventi, tale condizione è anche sufficiente (vedi, p.es., Eserc.4 del 20 Giugno 2007).

Quindi A e B sono scambiabili, invece E e F no, essendo $P(F) = 2\,P(E)$.

Una verifica diretta è la seguente: si ha

$$P(A^c \wedge B) = P(B) = P(A) = P(A \wedge B^c)\ ,$$

mentre

$$P(F^c \wedge E) = P(E) \neq 2\,P(E) = P(F) = P(F \wedge E^c)\ .$$

2. - Per ogni $\varepsilon > 0$ si ha (la terza uguaglianza, per l'indipendenza)

$$P(Y_n \geq \varepsilon) = P(\min\{X_1, \dots, X_n\} \geq \varepsilon) = P(X_1 \geq \varepsilon, \dots, X_n \geq \varepsilon) = \prod_{k=1}^{n} P(X_k \geq \varepsilon) =$$

$$= \prod_{k=1}^{n} \Big(1 - e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\lfloor\varepsilon\rfloor} \frac{\lambda^x}{x!}\Big) = \Big(1 - e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\lfloor\varepsilon\rfloor} \frac{\lambda^x}{x!}\Big)^n \longrightarrow 0 \ \ (per\ n \to \infty).$$

Quindi Y_n converge in probabilità al numero aleatorio $Y = 0$. Per il Teorema 9 di p.38 degli Appunti, Y_n converge anche in legge a $Y = 0$.

Una verifica diretta è la seguente: per l'indipendenza, la funzione di ripartizione del minimo (che vale 0 per $y < 0$) è, per $y \in \mathbb{N} \cup \{0\}$,

$$F_n(y) = P(Y_n \leq y) = 1 - P(Y_n > y) = 1 - \prod_{i=1}^{n} P(X_i > y) = 1 - \Big(1 - e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{y} \frac{\lambda^x}{x!}\Big)^n \longrightarrow 1 \ \ (per\ n \to \infty),$$

e quindi il limite $F(y)$ della successione $\{F_n(y)\}$ vale 0 per $y < 0$ (come ogni $F_n(y)$), e vale 1 per $y \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Pertanto Y_n converge in legge a $Y = 0$, n.a. costante (precisamente, $P(Y = 0) = 1$).

3. - Vedi libro (R.Scozzafava - Incertezza e Probabilità - Zanichelli 2001), Esercizio 100, p.184 (Soluz. a p. 208), con lieve modifica dei dati.

Vedi anche Eserc.1 del 21 Dicembre 2006, Eserc.4 del 14 Luglio 2007.

CALCOLO DELLE PROBABILITÀ 2 (Laurea Specialistica)
17 gennaio 2009

Motivare *dettagliatamente* le risposte su fogli allegati
Anche questo foglio va riconsegnato (con NOME e COGNOME, a fondo pagina)

1. - Dato, per $n \in \mathbb{N}$, un processo uniforme $X_1 \dots X_n$ sull'intervallo $[0,1]$, si consideri la quinta lacuna L_5. Calcolare la previsione $\mathbb{P}(L_5^2)$.

2. - Si consideri un processo di branching relativo a X_n individui, con ogni individuo j che può dare origine, nel corso della propria vita, ad un numero $Z_n^{(j)} = Z$ di discendenti, con distribuzione di Poisson di parametro $\lambda \leq 1$.
Calcolare la probabilità p_e di estinzione del processo.

3. - Dato un processo di Poisson di intensità λ, e detto X_k $(k = 1, 2, \dots, n)$ il tempo d'attesa fra il $(k-1)$-esimo ed il k-esimo arrivo, sia, per ogni $n \in \mathbb{N}$,

$$Y_n = min\{X_1, \dots, X_n\}.$$

Studiare l'eventuale convergenza in legge di Y_n ad un numero aleatorio Y.

NOME E COGNOME:

SOLUZIONI (17 gennaio 2009)

1. - Si ha, utilizzando la densità della prima statistica d'ordine,

$$\mathbb{P}(L_5^2) = \mathbb{P}(X_{(1)}^2) = \int_0^1 x^2\, n\,(1-x)^{n-1}\, dx\ ,$$

da cui, con successive integrazioni per parti,

$$\mathbb{P}(L_5^2) = \frac{2}{(n+1)(n+2)}\ .$$

2. - Si deve risolvere l'equazione

$$t = g_{z}(t)\ , \qquad (*)$$

con $t = p_e$ e con $g_z(t)$ funzione generatrice della distribuzione di Poisson considerata, cioè

$$g_Z(t) = \mathbb{P}(t^Z) = e^{\lambda(t-1)} \quad , \quad |t| \leq 1$$

(cfr. Appunti, p.10, Esercizio 4). Quindi, sostituendo nella $(*)$, si vede facilmente che l'unica soluzione è $t = 1 = p_e$.

3. - Poichè i tempi d'attesa hanno distribuzione esponenziale e sono indipendenti, si ha, per $y \geq 0$,

$$F_n(y) = P(Y_n \leq y) = 1 - P(Y_n > y) = 1 - \prod_{i=1}^{n} P(X_i > y) = 1 - (e^{-\lambda y})^n = 1 - e^{-\lambda y n} \longrightarrow 1$$

e quindi il limite $F(y)$ della successione $\{F_n(y)\}$ vale 0 (come ogni $F_n(y)$) per $y < 0$, e vale 1 per $y \geq 0$.

Pertanto $Y = 0$, n.a. costante (cioè $P(Y = 0) = 1$).

CALCOLO DELLE PROBABILITÀ 2 (Laurea Specialistica)
20 giugno 2009

Motivare *dettagliatamente* le risposte su fogli allegati

1. - Per ogni $k \in \mathbb{N}$, si consideri il numero aleatorio X_k tale che

$$P(X_k = x) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} \ ,$$

con $\lambda > 0$. Supposto che i numeri aleatori X_k siano indipendenti, studiare l'eventuale convergenza *in probabilità* della successione

$$Y_n = \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} \quad , \ n \in \mathbb{N}$$

ad un numero aleatorio X.

2. - Calcolare la varianza di un numero aleatorio X con distribuzione di Poisson (di parametro λ) utilizzando la funzione generatrice.

3. - Un vettore aleatorio gaussiano $X_{m,\sigma} = (X_1, X_2, X_3)$ ha vettore previsione e matrice di covarianza, rispettivamente,

$$m = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \quad , \quad C_n^\sigma = \begin{pmatrix} 9 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} .$$

– Stabilire se i numeri aleatori X_1 e $X_2 - \frac{2}{9} X_1$ sono stocasticamente indipendenti ;

– Il vettore $Y = (X_1, X_3)$ è gaussiano? Come si determina la sua distribuzione congiunta?

NOME E COGNOME :

SOLUZIONI (20 giugno 2009)

1. - Essendo $\mathbb{P}(X_k) = \lambda$, per la legge debole dei grandi numeri la successione Y_n converge in probabilità al numero aleatorio costante $X = \lambda$.

2. - Si ha

$$g_X(t) = \mathbb{P}(t^X) = \sum_{x=0}^{\infty} t^x\, e^{-\lambda}\, \frac{\lambda^x}{x!} = \sum_{x=0}^{\infty} e^{-\lambda}\, \frac{(\lambda\, t)^x}{x!} = e^{-\lambda}\, e^{\lambda\, t} = e^{\lambda(t-1)} \quad , \quad |t| \leq 1$$

e quindi

$$g'_X(t) = e^{\lambda(t-1)}\, \lambda \quad , \quad g''_X(t) = e^{\lambda(t-1)}\, \lambda^2 \quad ,$$

da cui

$$var(X) = g''_X(1) + g'_X(1) - [g'_X(1)]^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda\ .$$

3. - Siccome i numeri aleatori X_1 e $X_2 - \frac{2}{9}\, X_1$ sono ovviamente gaussiani, la loro indipendenza equivale a $cov(X_1\,, X_2 - \frac{2}{9}\, X_1) = 0$. Con semplici calcoli si trova che

$$cov(X_1\,, X_2 - \frac{2}{9}\, X_1) = cov(X_1\,, X_2) - \frac{2}{9}\, var(X_1) = 2 - \frac{2}{9} \cdot 9 = 0\ .$$

Anche il vettore Y è (come sottovettore di un vettore gaussiano) gaussiano, e quindi per determinare la sua distribuzione congiunta basta conoscere vettore previsione e matrice di covarianza. Il vettore previsione si ottiene prendendo prima e terza riga del vettore m, mentre la matrice di covarianza si ottiene da C_n^{σ} eliminando seconda riga e seconda colonna.

CALCOLO DELLE PROBABILITÀ 2 (Laurea Specialistica)
15 settembre 2009

Motivare *dettagliatamente* le risposte su fogli allegati

1. - Per ogni $k \in \mathbb{N}$, si consideri il numero aleatorio X_k con funzione generatrice

$$g_{X_k}(t) = \mathbb{P}(t^{X_k}) = e^{\lambda(t-1)} \quad , \quad |t| \leq 1$$

con $\lambda > 0$. Supposto che i numeri aleatori X_k siano indipendenti, studiare l'eventuale convergenza *in probabilità* della successione

$$Y_n = \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} \quad , \; n \in \mathbb{N}$$

ad un numero aleatorio X.

2. - Calcolare la varianza di un numero aleatorio X con distribuzione binomiale (di parametri n e p) utilizzando la funzione generatrice.

3. - Un vettore aleatorio gaussiano $X_{m,\sigma} = (X_1, X_2, X_3, X_4)$ ha vettore previsione e matrice di covarianza, rispettivamente,

$$m = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad , \quad C_n^{\sigma} = \begin{pmatrix} 9 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 4 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix} .$$

– Stabilire se i numeri aleatori X_3 e $X_4 - \frac{1}{2} X_1$ sono stocasticamente indipendenti;

– Il vettore $Y = (X_1, X_4)$ è gaussiano? Come si determina la sua distribuzione congiunta?

NOME E COGNOME:

SOLUZIONI (15 settembre 2009)

1. - Per la legge debole dei grandi numeri, la successione Y_n converge in probabilità al numero aleatorio costante $X = \mathbb{P}(X_k) = g'_{X_k}(1) = \lambda$.

2. - Si ha

$$g_X(t) = \mathbb{P}(t^X) = \sum_{x=0}^{n} t^x \binom{n}{x} p^x q^{n-x} = \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} (p\,t)^x q^{n-x} = (p\,t+q)^n \,,$$

e quindi

$$g'_X(t) = n\,(p\,t+q)^{n-1}p\,,$$

da cui $g'_X(1) = n\,p$. Si ha inoltre

$$g''_X(t) = n\,p\,(n-1)(p\,t+q)^{n-2}p\,,$$

da cui

$$g''_X(1) = n\,p\,(n-1)p = n^2\,p^2 - n\,p^2 \ .$$

In conclusione

$$var(X) = g''_X(1) + g'_X(1) - [g'_X(1)]^2 = n\,p - (n\,p)^2 + n^2\,p^2 - n\,p^2 = n\,p\,q \ .$$

3. - Siccome i numeri aleatori X_3 e $X_4 - \frac{1}{2}\,X_1$ sono ovviamente gaussiani, la loro indipendenza equivale a $cov(X_3\,, X_4 - \frac{1}{2}\,X_1) = 0$. Con semplici calcoli si trova che

$$cov(X_3\,, X_4 - \frac{1}{2}\,X_1) = cov(X_3\,, X_4) - \frac{1}{2}\,cov(X_3\,, X_1) = 1 - \frac{1}{2}\,\cdot 2 = 0 \ .$$

Anche il vettore Y è (come sottovettore di un vettore gaussiano) gaussiano, e quindi per determinare la sua distribuzione congiunta basta conoscere vettore previsione e matrice di covarianza. Il vettore previsione si ottiene prendendo prima e quarta riga del vettore m, mentre la matrice di covarianza si ottiene da C_n^σ eliminando seconda e terza riga, e seconda e terza colonna.